МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт

з курсу

«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

*(для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН
спеціальностей 7.050107 «Економіка підприємства»
7.050106 «Облік і аудит»)*

**Харків
ХНАМГ
2012**

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу «Математичне програмування» (для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей 7.050107 «Економіка підприємства», 7.050106 «Облік і аудит») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 55 с.

Укладачі : доц. В. М. Охріменко,
ст. викл. Т. Б. Воронкова,
ст. викл. О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою «Інформаційних систем і технологій в міському господарстві», протокол № 79 від 30.08.2011 р.

ВСТУП

Курс «Математичне програмування» є нормативною дисципліною в навчальних планах перепідготовки спеціалістів за спеціальностями «Економіка підприємства» та «Облік і аудит». Обсяг курсу становить 108 академічних годин або 3 кредити ECTS, у т.ч. 16 аудиторних занять, з яких 8 годин припадає на лабораторні роботи.

Метою вивчення дисципліни «Математичне програмування» є формування знань в області основних методів розв'язання варіаційних задач на знаходження екстремуму функції на множині припустимих розв'язків у теоретичних та практичних економічних проблемах з управління організаційними системами.

У результаті вивчення курсу студенти повинні знати основні методи та алгоритми оптимізації розв'язків у задачах з керування організаційними системами та вміти застосовувати їх до розв'язання задач оптимального розподілення обмежених ресурсів, вибору оптимального варіанту з множини альтернативних.

У цих методичних вказівках розглянуті основні типи задач лінійного програмування, надані рекомендації з побудови їх математичних моделей та з пошуку оптимальних розв’язків засобами табличного редактора Microsoft Excel. Кожна лабораторна робота включає 12 варіантів навчальних завдань певного типу, а також список контрольних запитань, що охоплюють як теоретичні положення, так і конкретні варіанти завдань.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
РОБОТА З НАДБУДОВОЮ MICROSOFT EXCEL «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Ціль роботи – засвоєння прийомів з розв'язання задач лінійного програмування з використанням табличного процесора Microsoft Excel та роботи з надбудовою «Поиск решения».

Вихідні дані – математична модель ЗЗЛП відповідно до варіанта, указаного викладачем.

Основні відомості

Якщо в будь-якій системі ресурсів, що є в наявності, не вистачає для ефективного виконання кожної з намічених робіт, виникають так звані *розподільні задачі*. Ціль розв'язання розподільної задачі – відшукання оптимального розподілу ресурсів за роботами. Під оптимальністю розподілу розуміють, наприклад, мінімізацію загальних витрат, пов'язаних з виконанням робіт, або максимізацію одержуваного в результаті загального доходу.

Найпростішими серед задач математичного програмування є задачі лінійного програмування (ЛП). Характерні риси задач ЛП наступні:

1) показник ефективності L є лінійною функцією, яку задано на елементах розв'язку $x_1, x_2, ..., x_n$;

2) обмежувальні умови, що накладаються на можливі розв'язки, мають вигляд лінійних рівностей або нерівностей.

У загальній формі запису модель задачі ЛП має вигляд:

цільова функція $L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$;

$$\text{при обмеженнях } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m, \\ x_1, x_2, ..., x_k \ge 0 \ (k \le n). \end{cases}.$$

Припустимий розв'язок – це сукупність чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеженням задачі.

Оптимальний розв'язок – це план $X^* = \left(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n\right)$, при якому цільова функція приймає своє максимальне (мінімальне) значення.

Для побудови математичної моделі необхідно визначити, що є шуканими величинами, тобто змінними задачі; у чому полягає ціль, для досягнення якої із всіх припустимих значень змінних потрібно обрати ті, що відповідатимуть найкращому, тобто оптимальному, розв'язку; які обмеження накладені на змінні.

У цій лабораторній роботі розглядається розв'язання одноіндексної задачі ЛП, що представляє собою *загальну розподільну задачу*.

Порядок виконання роботи

1. Ввести умову задачі, для чого

- створити екранну форму для введення умови задачі: змінних, цільової функції, обмежень, граничних умов;
- ввести вихідні дані в екранну форму: коефіцієнти цільової функції, коефіцієнти при змінних в обмеженнях, праві частини обмежень;
- ввести залежності з математичної моделі в екранну форму: формулу для розрахунку цільової функції, формули для розрахунку значень лівих частин обмежень;
- задати цільову функцію (у вікні "Поиск решения"): вказати цільову комірку, напрямок оптимізації цільової функції;
- ввести обмеження й граничні умови (у вікні "Поиск решения"): комірки зі значеннями змінних, граничні умови для припустимих значень змінних, співвідношення між правими й лівими частинами обмежень.

2. Отримати розв'язок задачі, для чого:

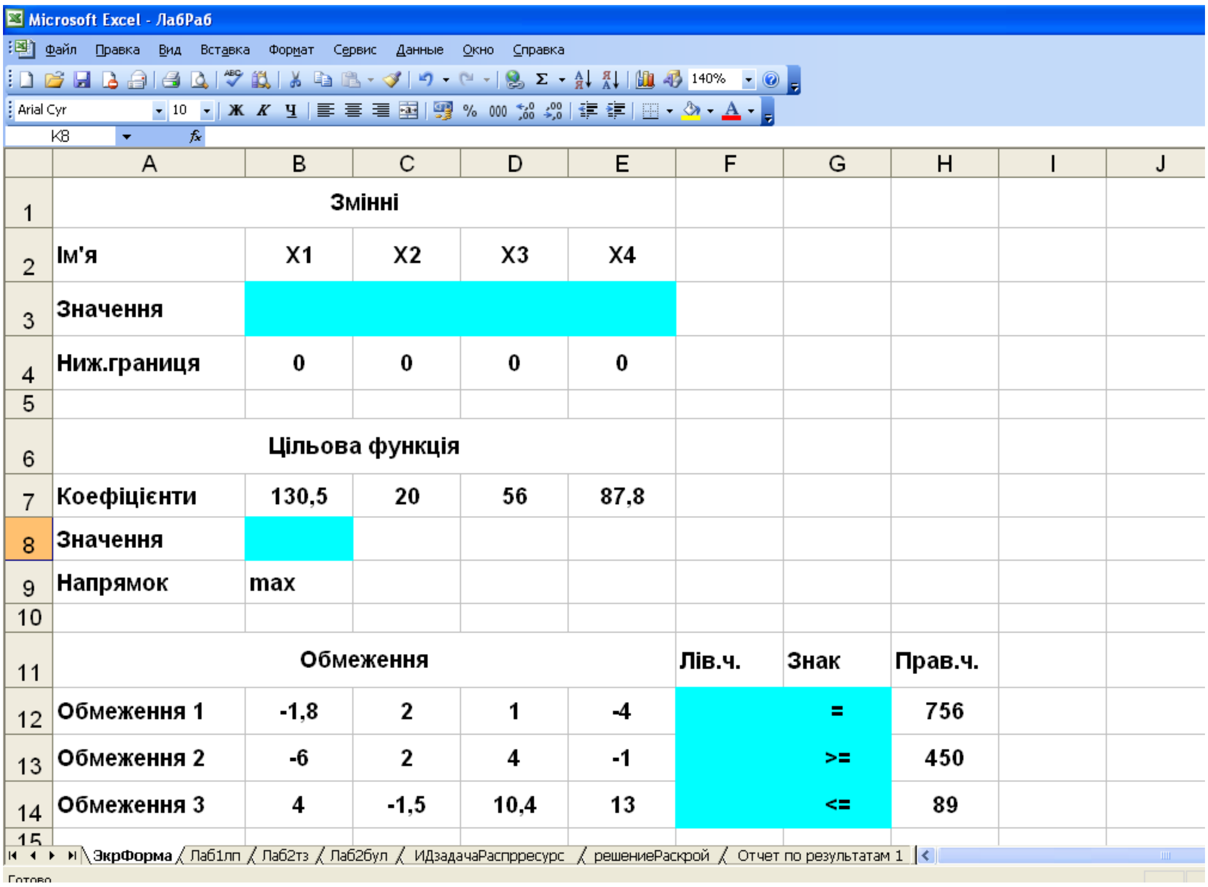
- встановити параметри розв'язання задачі (у вікні "Поиск решения");
- запустити задачу на розв'язання (у вікні "Поиск решения");
- обрати формат виводу розв'язку (у вікні "Результаты поиска решения").

Приклад 1.1. Знайдемо розв'язок для задачі ЛП, що подана у вигляді моделі:

$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1{,}4}. \end{cases}$$

Створимо екранну форму для введення умов задачі, у якій кожній змінній й кожному коефіцієнту задачі поставлено у відповідність конкретну комірку Excel (рис. 1.1). Зокрема, змінним Xj відповідають комірки **B3 - E3**, коефіцієнтам цільової функції відповідають комірки **B7 – E7**, правим частинам обмежень відповідають комірки **H13 - H14**. Введемо в екранну форму коефіцієнти.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4			
3	Значення							
4	Ниж.границя	0	0	0	0			
5								
6		Цільова функція						
7	Коефіцієнти	130,5	20	56	87,8			
8	Значення							
9	Напрямок	max						
10								
11		Обмеження				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
12	Обмеження 1	-1,8	2	1	-4		=	756
13	Обмеження 2	-6	2	4	-1		>=	450
14	Обмеження 3	4	-1,5	10,4	13		<=	89

Рис. 1.1 – Екранна форма задачі

Введемо в екранну форму залежності з математичної моделі. В комірку **B8**, у якій відображатиметься значення цільової функції, введемо формулу**,** за якою це значення буде розраховане:

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4\,.$$

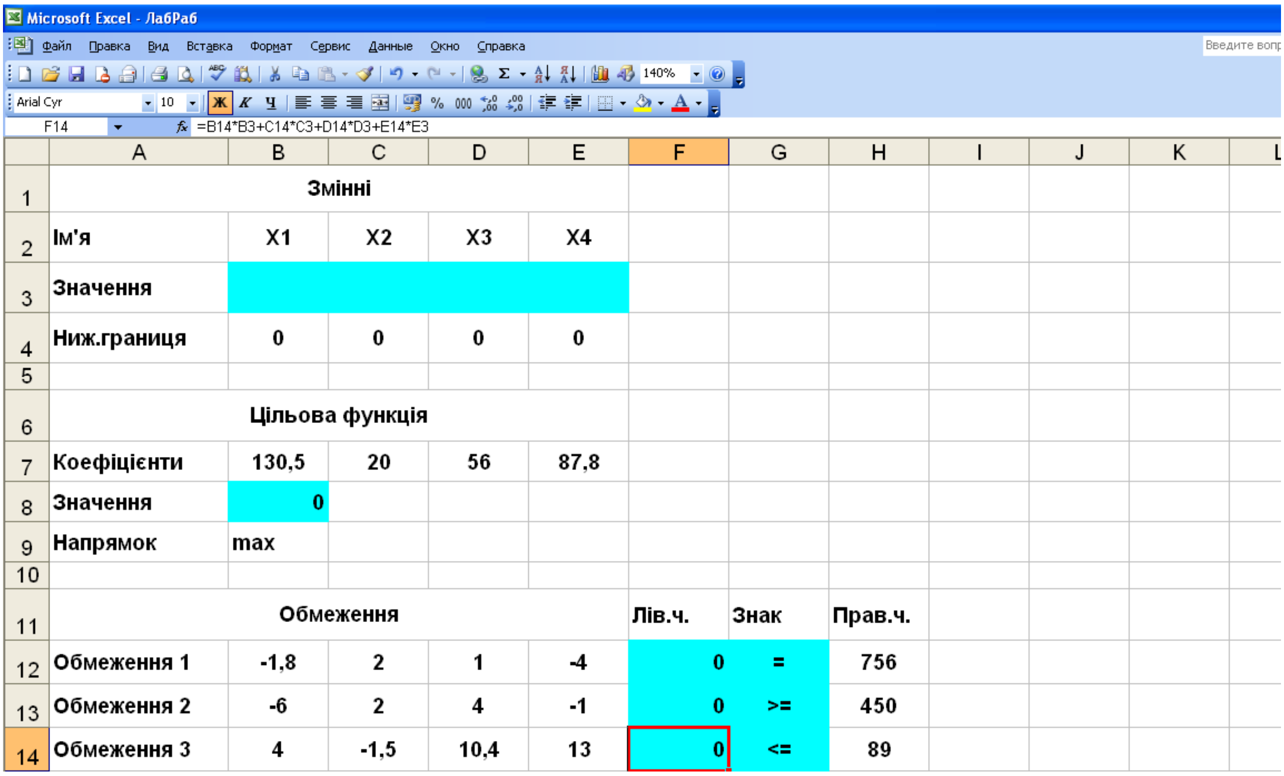
Використовуючи позначення відповідних комірок у Excel (див. рис. 1.1), формулу для розрахунку цільової функції можна записати як суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (**B3, C3, D3, E3**), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів цільової функції (**B7, C7, D7, E7**), тобто

$$B7 \cdot B3 + C7 \cdot C3 + D7 \cdot D3 + E7 \cdot E3.$$

Щоб задати зазначену формулу, введемо у комірку **B8** функцію Excel з відповідними аргументами:

=СУММПРОИЗВ(B7:E7;B2:E2),

у результаті в цільовій комірці з'явиться 0 (нульове значення) (рис.1.2).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4			
3	Значення							
4	Ниж.границя	0	0	0	0			
5								
6		Цільова функція						
7	Коефіцієнти	130,5	20	56	87,8			
8	Значення	0						
9	Напрямок	max						
10								
11		Обмеження				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
12	Обмеження 1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
13	Обмеження 2	-6	2	4	-1	0	>=	450
14	Обмеження 3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89

Рис.1. 2 – Екранна форма задачі після введення усіх необхідних залежностей

Введемо залежності для лівих частин обмежень. Ліві частини обмежень задачі являють собою суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (**B3, C3, D3, E3**), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів конкретного обмеження (**B12, C12, D12, E12 –** 1-е обмеження**; B13, C13, D13, E13** – 2-е обмеження й **B14, C14, D14, E14 –** 3-е обмеження). Формули, що відповідають лівим частинам обмежень, подані у табл.1.1.

Таблиця 1.1 – Формули, що описують обмеження моделі

Ліва частина обмеження	**Формула Excel**
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ або $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B12:E12)**
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ або $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B13:E13)**
$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ або $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B14:E14)**

Як видно з табл. 1.1, формули, що задають ліві частини обмежень задачі, відрізняються одна від одної та від формули в цільовій комірці **B8** тільки номером рядка в другому масиві. Цей номер визначається тим рядком, у якому обмеження записане в екранній формі. Тому для завдання залежностей для лівих частин обмежень досить скопіювати формулу з цільової комірки у комірки лівих частин обмежень, але необхідно попередньо посилання на комірки, що містять значення Xj, зробити абсолютними, указавши символ долара натисканням клавіші F4.

Задамо цільову функцію у вікні *«Поиск решения»*, що викликається з меню *«Сервис»* (рис. 1.3). Для цього поставимо курсор у поле *«Установить целевую ячейку»* і введемо адресу цільової комірки **$B$8** або натиснемо лівою клавішею миші на цільову комірку в екранній формі. Клацнемо один раз лівою клавішею миші селекторну кнопку *«максимальному значению»* для вказівки напрямку оптимізації цільової функції.

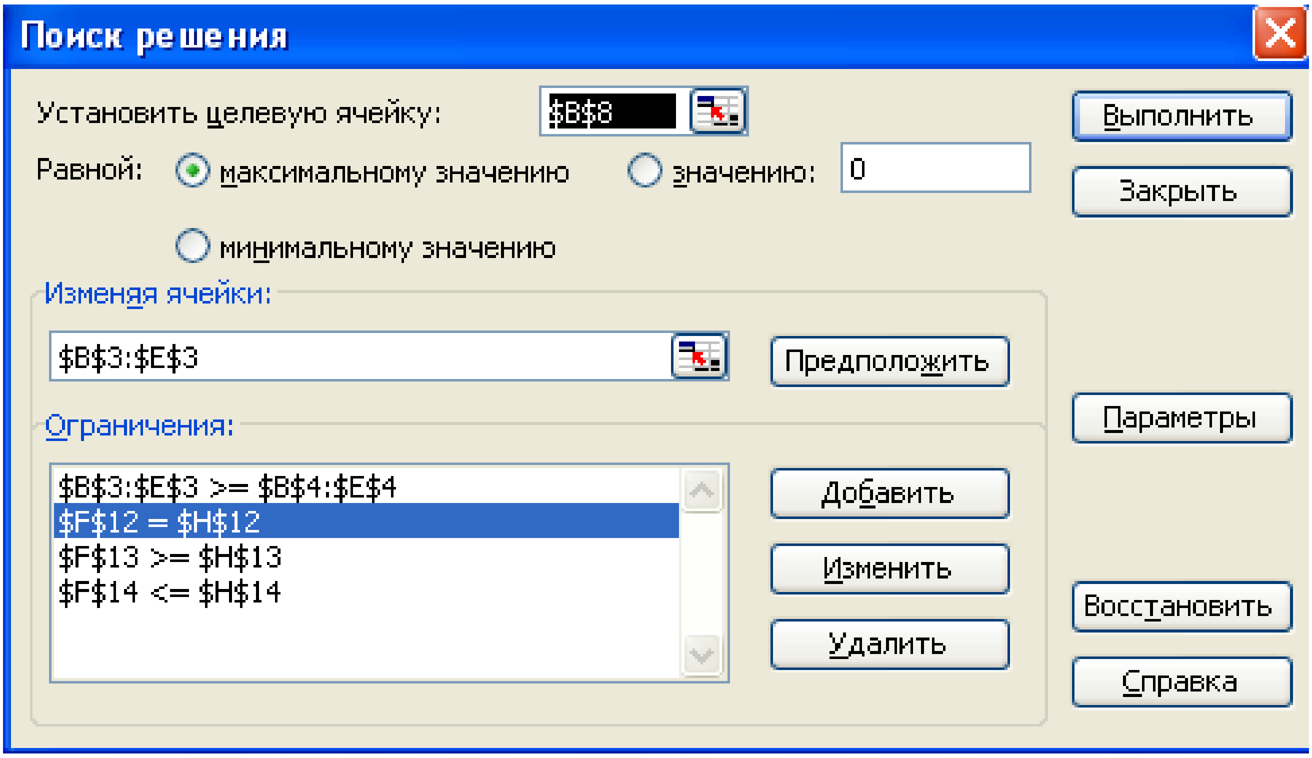


Рис. 1.3 – Вікно «*Поиск решения*» задачі

Введемо обмеження та граничні умови. Задамо комірки змінних. Для цього у вікні «*Поиск решения*» у поле «*Изменяя ячейки*» впишемо адреси змінних Xj – комірки **$B$3:$E$3**. Необхідні адреси можна також внести у поле «*Изменяя ячейки*» автоматично, шляхом виділення мишею відповідних комірок змінних безпосередньо в екранній формі.

Задамо граничні умови для припустимих значень змінних. У нашому випадку на значення змінних накладається тільки гранична умова невід'ємності, тобто їх нижня границя повинна дорівнювати нулю (див. рис. 1.1). Після натискання кнопки «*Добавить*» з'явиться вікно «*Добавление ограничения*» (рис. 1.4). У поле «*Ссылка на ячейку*» введемо адреси комірок змінних **$B$3:$E$3**. У полі знака відкриємо список пропонованих знаків та виберемо ≥. У поле «Ограничение» введемо адреси комірок нижньої границі значень змінних, тобто **$B$4:$E$4**.

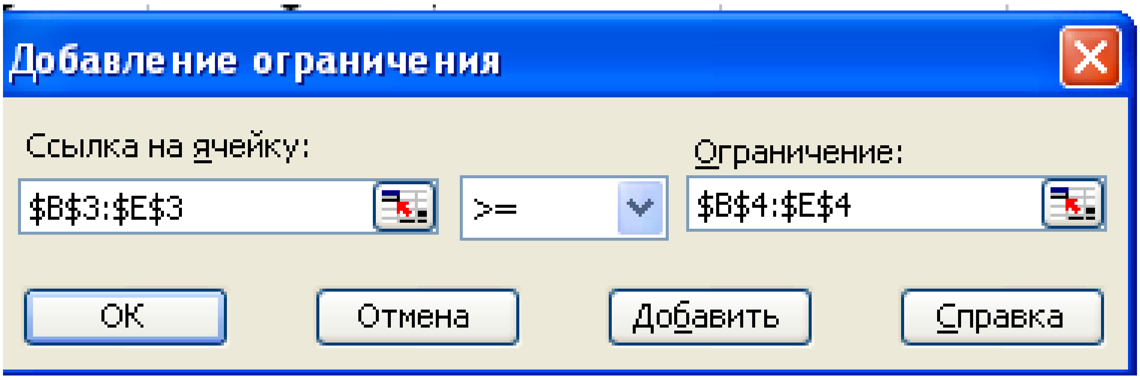


Рис. 1.4 – Додавання умови невід'ємності змінних задачі

Для введення обмежень, знаходячись у вікні *«Добавление ограничения»*, натиснемо кнопку *«Добавить»* і в полі *«Ссылка на ячейку»* введемо адресу комірки лівої частини конкретного обмеження, наприклад **$F$12**. Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею потрібної комірки безпосередньо в екранній формі. Далі відповідно до умови задачі оберемо у полі знака необхідний знак, наприклад =. У поле *«Ограничение»* введемо адресу комірки правої частини розглянутого обмеження, наприклад **$H$12**.

Аналогічно введемо обмеження: $F$11>=$H$11 та $F$12<=$H$12. Підтвердимо введення всіх перелічених вище умов натисканням кнопки OK.

Вікно *«Поиск решения»* після введення всіх необхідних даних задачі наведене на рис. 1.3.

Якщо при введенні умови задачі виникає необхідність у зміні або видаленні внесених обмежень або граничних умов, то це роблять натисканням кнопки *«Изменить»* або *«Удалить»* (див. рис. 1.3).

Дістанемо оптимальний розв'язок задачі. Попередньо треба встановити параметри розв'язання. Задача запускається на розв'язання у вікні *«Поиск решения»*, але для настанови конкретних параметрів розв'язання задач оптимізації певного класу необхідно натиснути кнопку *«Параметры»* та заповнити певні поля вікна *«Параметры поиска решения»* (рис. 1.5).

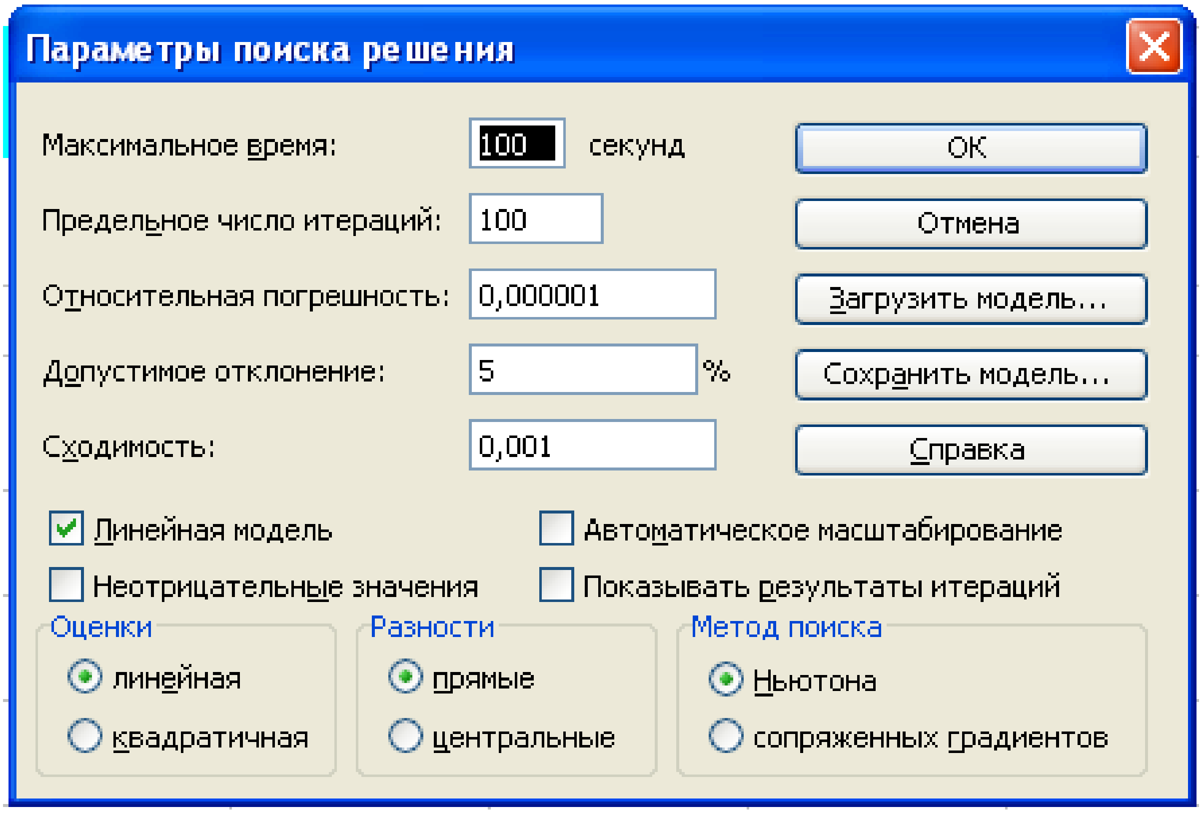


Рис. 1.5 – Параметри пошуку рішення, що підходять для більшості задач ЛП

Параметр *«Максимальное время»* служить для призначення часу (у секундах), виділюваного на розв'язання задачі. У поле можна ввести час, що не перевищує 32767 секунд (більше за 9 годин).

Параметр *«Предельное число итераций»* служить для управління часом розв'язання задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. У поле можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32767.

Параметр *«Относительная погрешность»* служить для завдання точності, з якою визначається відповідність комірки цільовому значенню або наближення до зазначених границь. Поле повинне містити число з інтервалу від 0 до 1. Чим *менше* кількість десяткових знаків в уведеному числі, тим *нижче* точність. Висока точність збільшує час, що потрібний для того, щоб зійшовся процес оптимізації.

Параметр *«Допустимое отклонение»* служить для завдання допуску на відхилення від оптимального розв'язку у цілочисельних задачах. При вказівці більшого допуску пошук розв’язку закінчується швидше.

Параметр *«Сходимость»* застосовується тільки при розв'язанні нелінійних задач.

Установка прапорця *«Линейная модель»* забезпечує прискорення пошуку розв'язку лінійної задачі за рахунок застосування симплекс-методу.

Підтвердимо встановлені параметри натисканням кнопки **«**ОК**»**.

Запуск задачі на розв'язання провадиться з вікна *«Поиск решения»* шляхом натискання кнопки *«Выполнить»*.

Після запуску на розв'язання задачі ЛП на екрані з'являється вікно *«Результаты поиска решения»* з одним з повідомлень, представлених на рис. 1.6, 1.7 та 1.8.

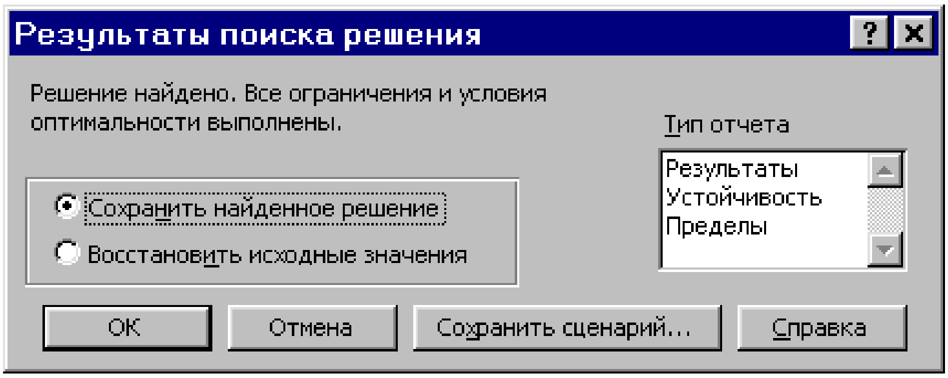


Рис. 1.6 – Повідомлення про успішне розв'язання задачі

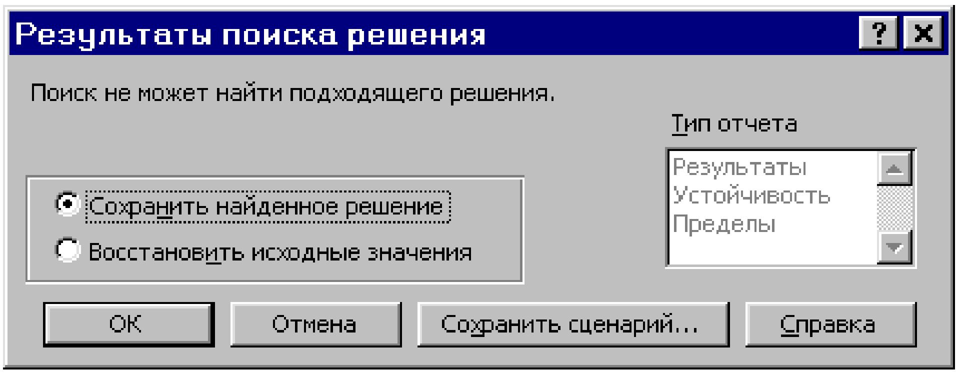


Рис. 1.7 – Повідомлення при несумісній системі обмежень задачі

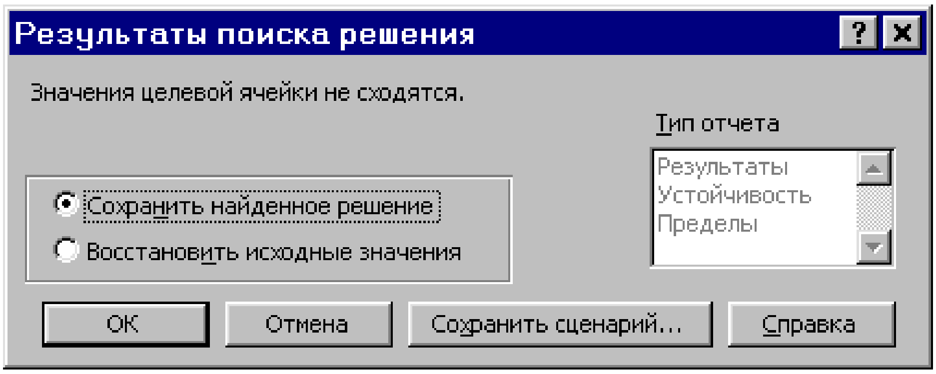


Рис. 1.8 – Повідомлення при необмеженості цільової функції в необхідному напрямку

Іноді повідомлення, що представлені на рис. 1.7 та 1.8, свідчать не про характер оптимального розв'язку задачі, а про те, що при введенні умов задачі в Excel були допущені *помилки,* які не дозволяють Excel знайти оптимальний розв'язок, що у дійсності існує.

Якщо при заповненні полів вікна *«Поиск решения»* були допущені помилки, що не дозволяють Excel застосувати симплекс-метод для розв'язання задачі або довести її розв'язання до кінця, то після запуску задачі на розв'язання на екран буде видане відповідне повідомлення із вказівкою причини, за якою розв'язок не знайдений. Іноді занадто мале значення параметра *«Относительная погрешность»* не дозволяє знайти оптимальний розв'язок. Для виправлення цієї ситуації треба збільшити погрішність, наприклад від 0,000001 до 0,00001 і т. д.

У вікні *«Результаты поиска решения»* представлені назви трьох типів звітів: *«Результаты»*, *«Устойчивость»*, *«Пределы»*. Вони необхідні при аналізі отриманого розв'язку на чутливість. Для одержання значень змінних, цільової функції й лівої частини обмежень безпосередньо в екранній формі натиснемо кнопку «ОК». У результаті в екранній формі з'являється оптимальний розв'язок задачі (рис. 1.9).

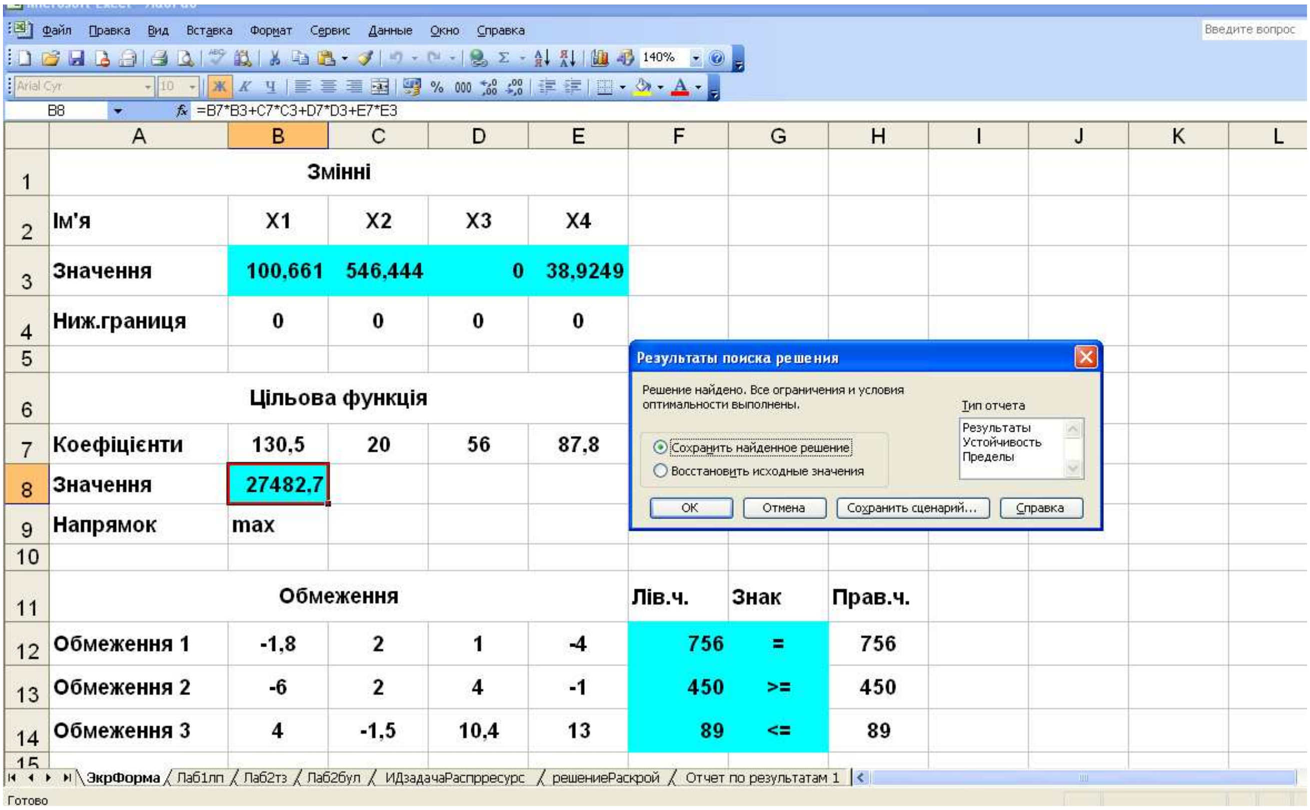
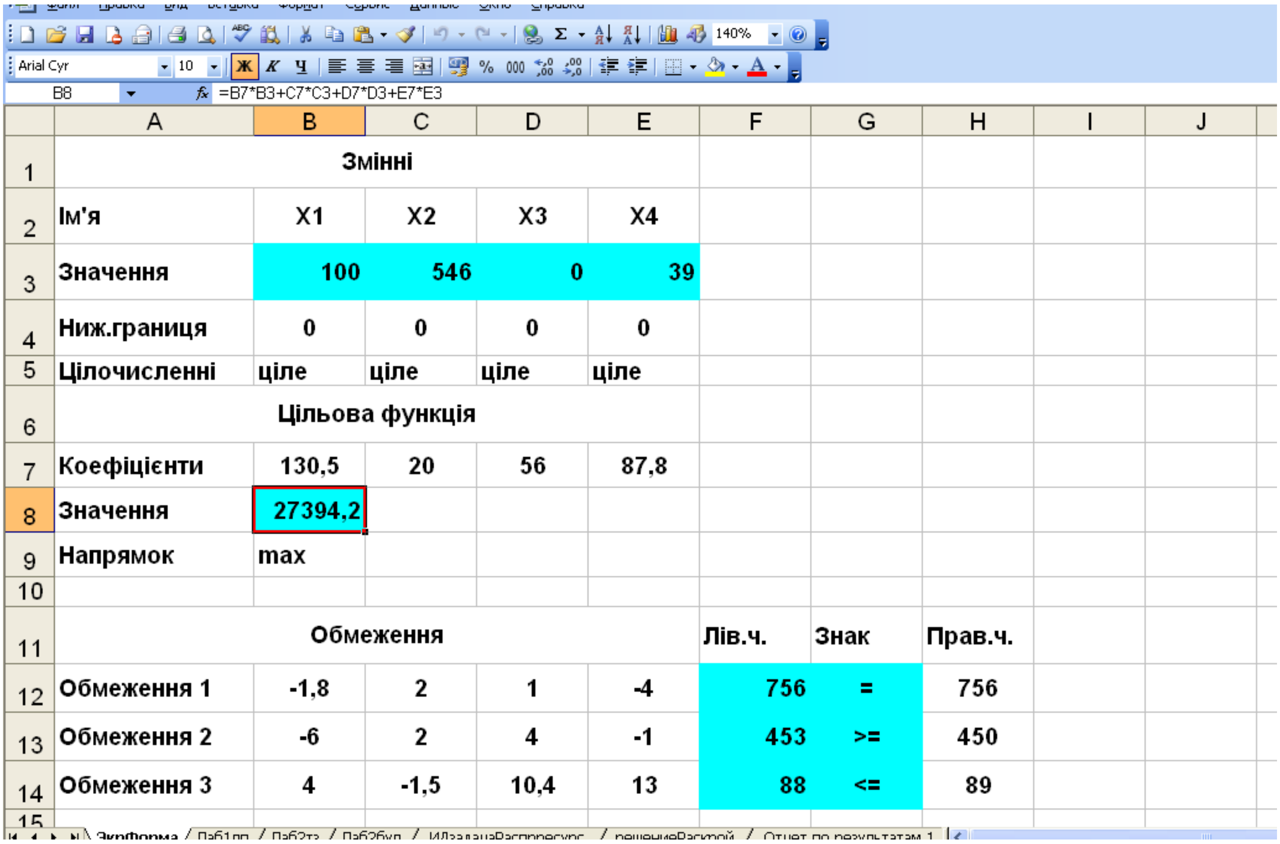


Рис. 1.9 – Екранна форма задачі з отриманим розв'язком

Задача цілочисельного програмування

Додамо до умови задачі вимогу цілочисельності значень всіх змінних. Для цього у процес введення умови задачі додамо наступні кроки:

- для наочності сприйняття умови задачі в екранній формі вкажемо, на які змінні накладається вимога цілочисельності (рис.1.10).
- у вікні *«Поиск решения»* (меню *«Сервис»* → *«Поиск решения»*) додамо обмеження, введемо їх у такий спосіб. У поле *«Ссылка на ячейку»* введемо адреси комірок змінних задачі, тобто **$B$3:$E$3** (рис. 1.11); у поле введення знака обмеження встановимо *«целое»* та підтвердимо введене обмеження натисканням кнопки «ОК».



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4			
3	Значення	100	546	0	39			
4	Ниж.границя	0	0	0	0			
5	Цілочисленні	ціле	ціле	ціле	ціле			
6		Цільова функція						
7	Коефіцієнти	130,5	20	56	87,8			
8	Значення	27394,2						
9	Напрямок	max						
10								
11		Обмеження				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
12	Обмеження 1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
13	Обмеження 2	-6	2	4	-1	453	>=	450
14	Обмеження 3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89

Рис. 1.10 – Розв'язок задачі за умови цілочисельності змінних

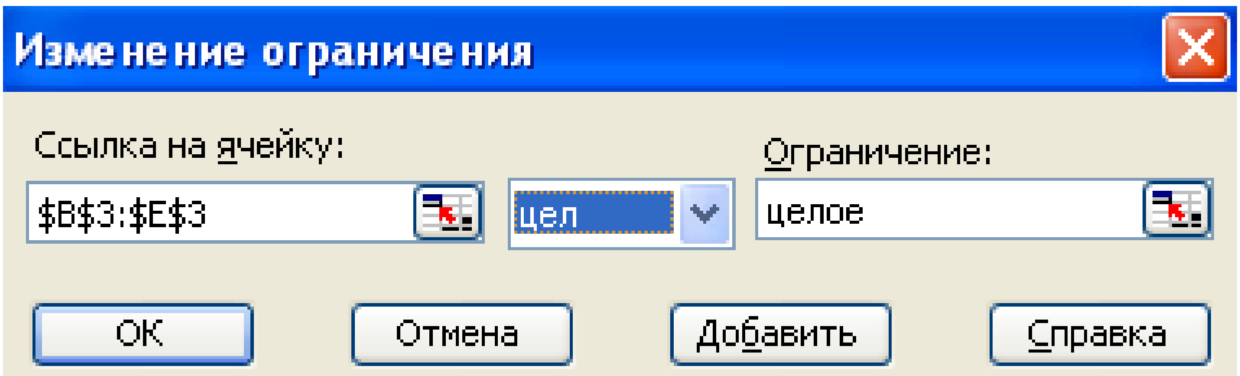


Рис. 1.11 – Введення умови цілочисельності змінних

На рис.1.10 представлений розв'язок задачі, до обмежень якої додано умову цілочисельності значень її змінних.

Транспортна задача

Двоіндексні задачі ЛП уводяться й вирішуються у Excel так само, як і одноіндексні. Специфіка введення умови двоіндексної задачі ЛП полягає лише в зручності матричного завдання змінних та коефіцієнтів цільової функції.

Приклад 1.2. Знайдемо розв'язок для транспортної задачі, суть якої полягає в оптимальній організації транспортних перевезень штучного товару зі складів до магазинів (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Вихідні дані транспортної задачі

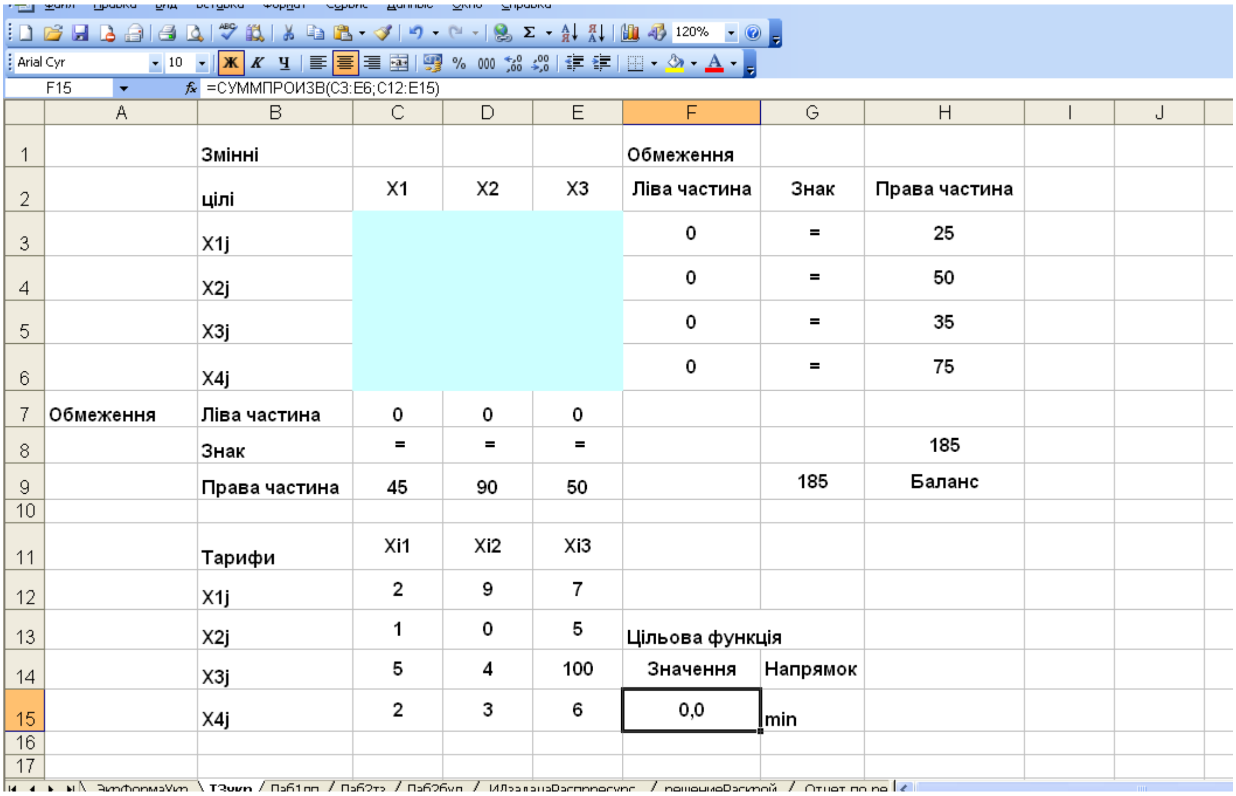
Тарифи, грн. /шт.	**1-й магазин**	**2-й магазин**	**3-й магазин**	**Запаси, шт.**
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потреби, шт.	45	90	50	

Цільова функція та обмеження цієї задачі мають вигляд

$$L(X) = 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\ + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50, \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} - \textit{целые} \left(\mathrm{i} = \overline{1,4};\ \mathrm{j} = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

Екранні форми, завдання змінних, цільової функції, обмежень та граничних умов транспортної задачі та її розв'язання подані на рис. 1.12, 1.13, 1.14 та у табл. 1.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Змінні				Обмеження				
2		цілі	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина		
3		X1j				0	=	25		
4		X2j				0	=	50		
5		X3j				0	=	35		
6		X4j				0	=	75		
7	Обмеження	Ліва частина	0	0	0					
8		Знак	=	=	=			185		
9		Права частина	45	90	50		185	Баланс		
10										
11		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3					
12		X1j	2	9	7					
13		X2j	1	0	5	Цільова функція				
14		X3j	5	4	100	Значення	Напрямок			
15		X4j	2	3	6	0,0	min			
16										
17										

Рис. 1.12 – Екранна форма транспортної задачі

(курсор у цільовій комірці **F15**)

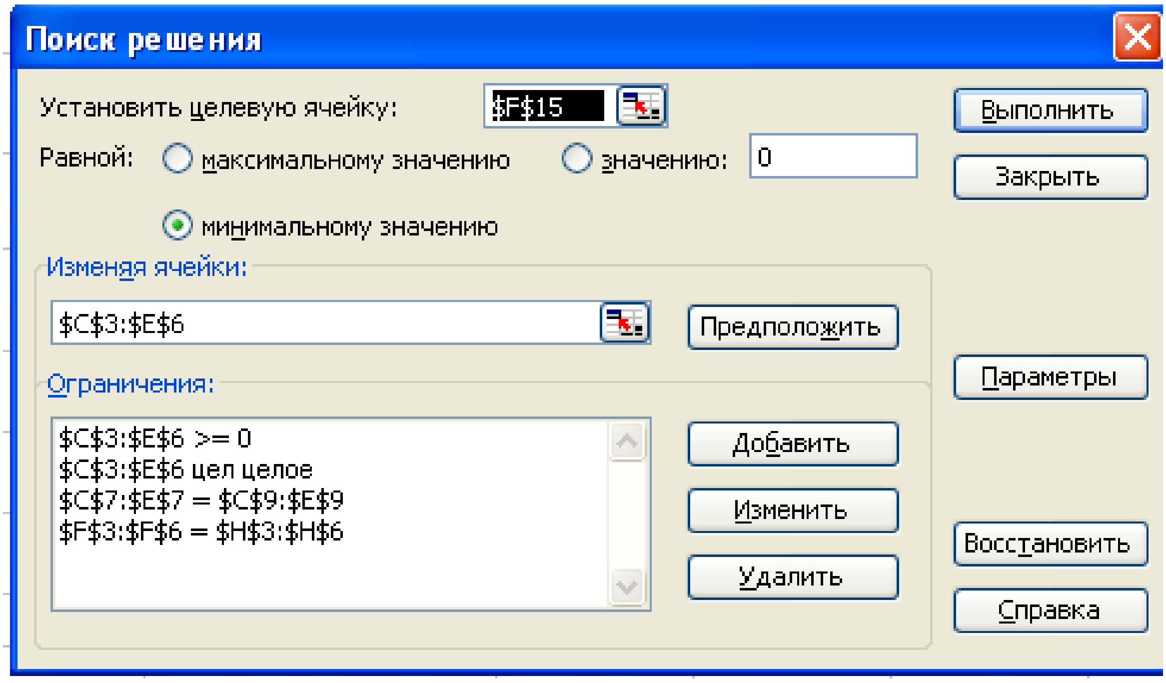
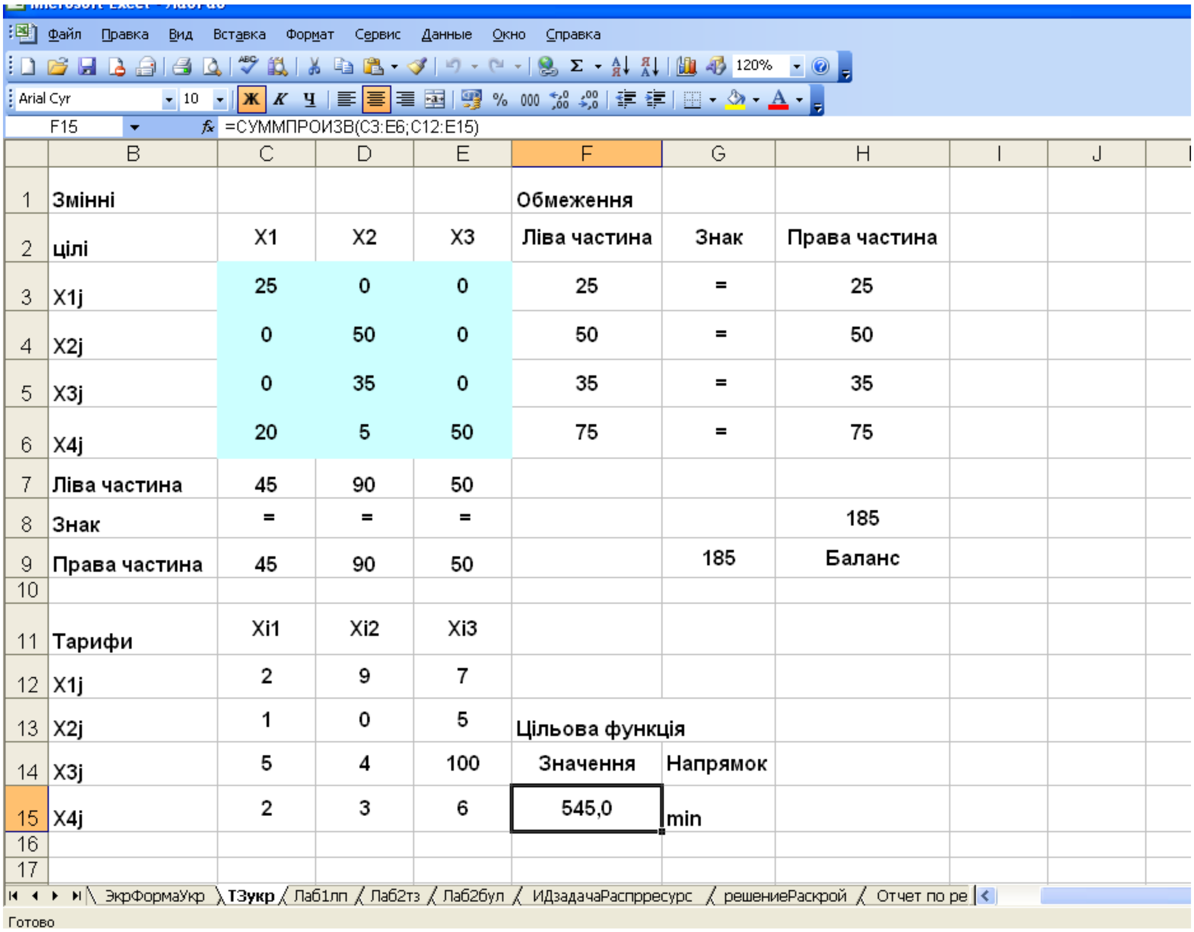


Рис. 1.13 – Обмеження та граничні умови транспортної задачі



F15 =СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)

	B	C	D	E	F	G	H
1	Змінні				Обмеження		
2	цілі	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина
3	X1j	25	0	0	25	=	25
4	X2j	0	50	0	50	=	50
5	X3j	0	35	0	35	=	35
6	X4j	20	5	50	75	=	75
7	Ліва частина	45	90	50			
8	Знак	=	=	=			185
9	Права частина	45	90	50		185	Баланс
10							
11	Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3			
12	X1j	2	9	7			
13	X2j	1	0	5	Цільова функція		
14	X3j	5	4	100	Значення	Напрямок	
15	X4j	2	3	6	545,0	min	

Рис. 1.14 – Екранна форма після одержання розв'язку транспортної задачі (курсор у цільовій комірці **F15**)

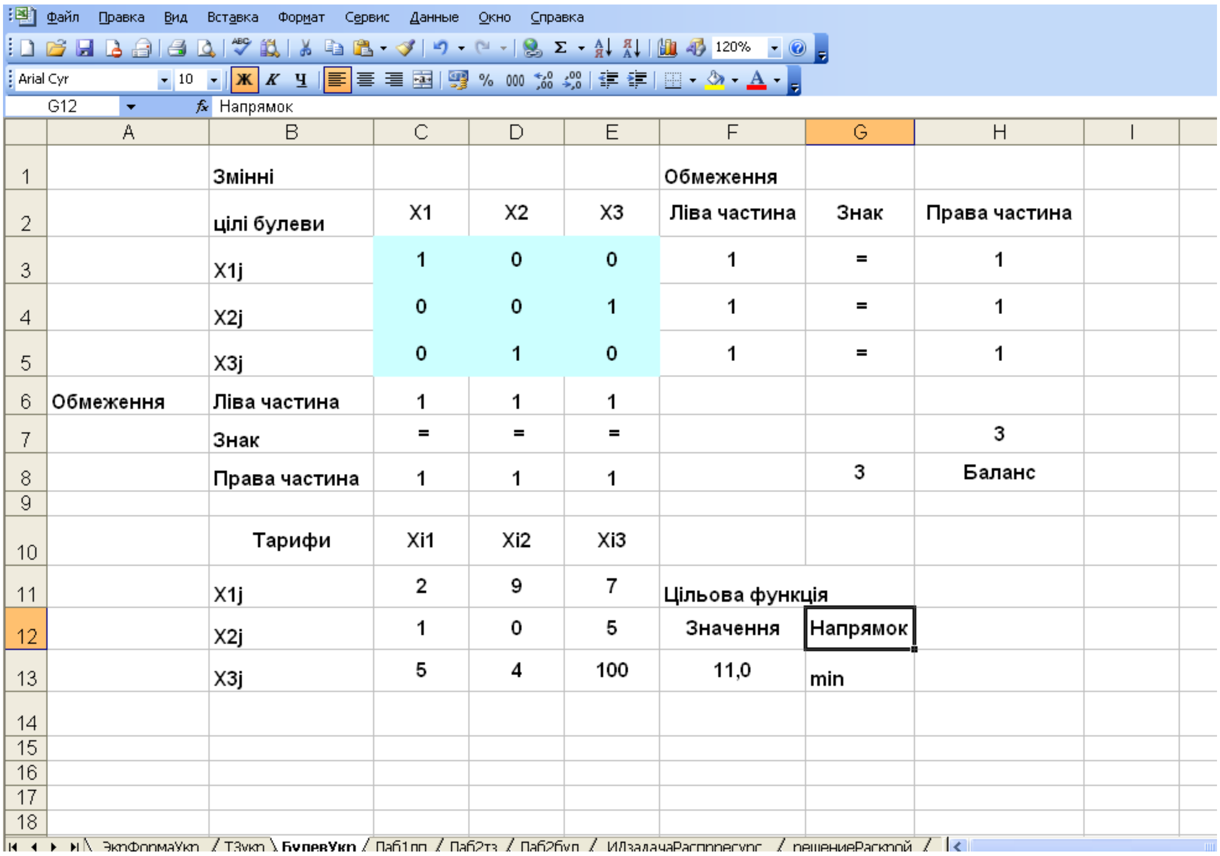
Таблиця 1.3 – Формули екранної форми транспортної задачі

Об'єкт математичної моделі	**Вираз у Excel**
Змінні задачі	**C3:E6**
Формула в цільовій комірці **F15**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)**
Обмеження за рядками у комірках **F3, F4, F5, F6**	**=СУМ(C3:E3)** **=СУМ(C4:E4)** **=СУМ(C5:E5)** **=СУМ(C6:E6)**
Обмеження за стовпцями у комірках **37, D7, E7**	**=СУМ(C3:C6)** **=СУМ(D3:D6)** **=СУМ(E3:E6)**
Сумарні запаси та потреби у комірках **H8, G9**	**=СУМ(H3:H6)** **=СУМ(C9:E9)**

Задача з булевими змінними

Особливим випадком задач з цілочисельними змінними є задачі, у результаті розв'язання яких шукані змінні x_j можуть приймати тільки одне з двох значень - 0 або 1. Такі змінні називають булевими.

Окрім завдання вимоги цілочисельності при введенні умови задачі з булевими змінними для наочності сприйняття введемо в екранну форму слово «булеви» як характеристику змінних (див. рис. 1.15); у вікні *«Поиск решения»* додамо граничні умови, що мають зміст обмежень значень змінних за їх одиничною верхньою границею (рис. 1.16).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні				Обмеження		
2		цілі булеви	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина
3		X1j	1	0	0	1	=	1
4		X2j	0	0	1	1	=	1
5		X3j	0	1	0	1	=	1
6	Обмеження	Ліва частина	1	1	1			
7		Знак	=	=	=			3
8		Права частина	1	1	1		3	Баланс
9								
10		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3			
11		X1j	2	9	7	Цільова функція		
12		X2j	1	0	5	Значення	Напрямок	
13		X3j	5	4	100	11,0	min	

Рис. 1.15 – Розв'язання двоіндексної задачі з булевими змінними

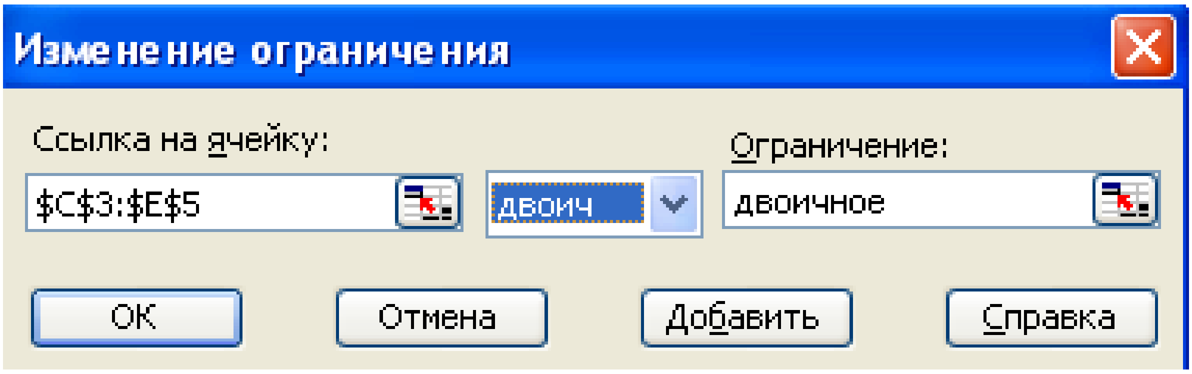


Рис. 1.16 – Додавання умови одиничної верхньої границі значень змінних двоіндексної задачі з булевими змінними

Вигляд вікна *«Поиск решения»* для задачі з булевими змінними, представленої на рис. 1.15, наведений на рис. 1.17.

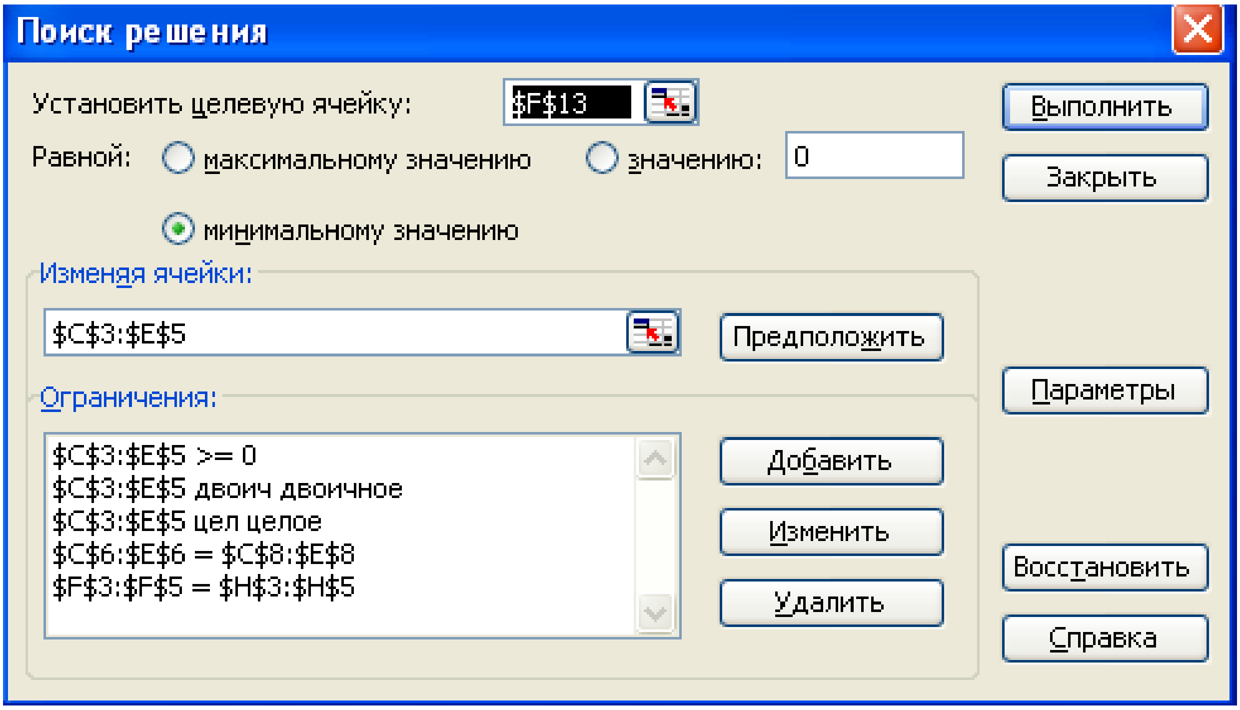


Рис. 1.17 – Вікно *«Поиск решения»* для задачі з булевими змінними

Якщо при розв'язанні задачі видається повідомлення про неможливість знаходження розв'язку, то ймовірна причина полягає у помилках введення умови задачі у Excel. Тому, перш ніж робити висновок про принципову неможливість знаходження оптимального розв'язку задачі, перевірте:

- чи правильно введені числові значення та знаки (+, -) коефіцієнтів цільової функції та обмежень, правих частин обмежень;

- чи збалансована двоіндексна задача;

- чи правильні формули в цільовій комірці та у комірках лівих частин обмежень;

- чи правильно вказано адресу цільової комірки та напрямок оптимізації цільової функції;

- чи правильно зазначені адреси комірок змінних;

- чи правильно введені знаки обмежень (<=, >=, =);

- чи правильно зазначені адреси комірок лівих та правих частин обмежень;

- чи задано вимогу невід'ємності змінних;

- чи задано вимогу за одиничним значенням верхньої границі змінних (для задач з булевими змінними);

- чи задано умову цілочисельності змінних (відповідно до умови задачі);

- перевірте правильність встановлення параметрів.

Зміст звіту

- ціль роботи;
- вихідні дані відповідно до варіанта завдання;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;
- результати розв'язання задачі.
- висновок.

Контрольні запитання

1. Які основні етапи розв'язання задач ЛП в MS Excel?
2. Поясніть способи завдання формул для цільової комірки та комірок лівих частин обмежень.
3. У чому полягає смисл використання символу **$** у формулах MS Excel?
4. У чому різниця використання у формулах MS Excel символів «**;**» та «**:**»?
5. Чому після введення формул у комірки цільової функції та лівих частин обмежень у них відображаються нульові значення?
6. Як в MS Excel задають напрямок оптимізації цільової функції?

7. Які комірки екранної форми виконують ілюстративну функцію, а які необхідні для розв'язання задачі?

8. Як наочно відобразити в екранній формі комірки, використовувані в конкретній формулі, з метою перевірки її правильності?

9. Поясніть загальний порядок роботи з вікном *«Поиск решения»*.

10. Як можна змінювати, додавати, видаляти обмеження у вікні *«Поиск решения»*?

11. Які повідомлення видаються в MS Excel у випадках: успішного розв'язання задачі ЛП; несумісності системи обмежень задачі; необмеженості цільової функції?

12. Поясніть зміст параметрів, що задають у вікні *«Параметры поиска решения»*.

13. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel цілочисельних задач ЛП.

14. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel двоіндексних задач ЛП.

15. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel задач ЛП з булевими змінними?

Варіанти індивідуальних завдань

Використовуючи MS Excel, знайти розв'язок для моделі ЛП, що відповідає заданому варіанту (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №1

№ варіанту	**Математична модель**
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000, \\ 0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}5x_3 + 1{,}3x_4 - 2{,}8x_5 \ge 32000, \\ 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2x_5 \le 40000, \\ 2{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}9x_4 = 15000, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$

№ варіанту	Математична модель
2	$L(X)=x_1+4x_3+8x_4-12x_5\to\min;$ $\begin{cases} x_1+9x_2+2x_3-4x_4=250,\\ 0{,}4x_1+x_2-5x_3+3x_4+8x_5\le 460,\\ 0{,}5x_1+10x_2-8x_3+6x_4+2x_5\le 190,\\ 11x_2-8{,}5x_3+3x_4+2x_5=210,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
3	$L(X)=-45x_1+65x_2+2x_4-3x_5\to\max;$ $\begin{cases} 15x_1+18x_2+34x_4-22x_5=56,\\ 2x_1+7x_3-4x_4+3x_5\ge 91,\\ 0{,}2x_1+0{,}8x_2+1{,}5x_3+0{,}9x_4+4x_5\le 26,\\ 1{,}8x_1-42x_2+6{,}4x_3+3x_5=15,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
4	$L(X)=14x_1-9x_2-x_4+6{,}4x_5\to\min;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1+10x_2-28x_4+5x_5\le 245,\\ 0{,}8x_1+1{,}7x_2-0{,}2x_3-0{,}5x_4=9,\\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5\le 54,\\ 8x_1+6{,}2x_2-4{,}8x_4+2{,}9x_5\ge 17,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
5	$L(X)=46x_1+2{,}3x_2+9{,}4x_3-4x_5\to\max;$ $\begin{cases} 3x_1+7{,}8x_3+12x_4+9x_5\ge 49,\\ 2{,}3x_2+5x_3+5{,}6x_4-x_5\le 86,\\ 16x_1-40x_4+29x_5=50,\\ 190x_1-98x_2-4x_4+150x_5\ge 300,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$

Продовження табл. 1.4

№ варіанту	Математична модель
6	$L(X) = 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 - 9{,}2x_4 + 14x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \le 74, \\ 0{,}8x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 1{,}5x_4 - 6{,}3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \le 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \ge 150, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \le 73, \\ 0{,}9x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}3x_3 + 1{,}5x_4 + 6{,}4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \le 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$
8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \ge 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \le 72, \\ 87x_1 - 6{,}4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$
9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \le 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0{,}4x_1 + 3x_2 - 4{,}2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \le 34, \\ 2{,}1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$

Продовження табл. 1.4

№ варіанту	Математична модель
10	$L(X)=10x_1+40x_3+13x_4+56x_5\to\min;$ $\begin{cases}7x_1+16x_3+5x_4+25x_5\le 600,\\ 8x_1+1{,}7x_2-0{,}5x_4+4{,}7x_5=890,\\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5\le 270,\\ 84x_1+62x_2+80x_3+14x_5\ge 2300,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
11	$L(X)=84x_1+5{,}7x_2+10x_4-3x_5\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+8{,}5x_2+16x_3+10x_5\ge 50,\\ 10{,}4x_1+6x_3+2x_4+4x_5\le 120,\\ 19x_1+18x_2-20x_4+30x_5=600,\\ 200x_1+45x_2-8x_3+3{,}4x_4\ge 210,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
12	$L(X)=0{,}84x_2-4x_3+3{,}8x_4+12x_5\to\min;$ $\begin{cases}15x_1+9{,}6x_2+34x_4-8x_5\le 180,\\ 0{,}6x_1+11{,}1x_2-2{,}6x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=68,\\ 14x_1+64x_3-38x_4+12x_5\le 81,\\ 190x_1-148x_2-7x_3+84x_5\ge 230,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОІНДЕКСНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ціль роботи – придбання навичок з побудови математичних моделей одноіндексних задач ЛП та розв'язання їх засобами Microsoft Excel.

Вихідні дані – задача виробничого планування відповідно до варіанта, указаного викладачем.

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номера свого варіанта оберіть умову задачі та побудуйте її модель.

2. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі в Excel та продемонструйте його викладачеві.

Примітка. Розрахунок числових даних, які безпосередньо не задані в умові задачі, робіть безпосередньо в комірках екранної форми. Це дозволяє чітко представляти шлях одержання числових даних в комірках екранної форми, уникати помилок при розрахунку параметрів задачі, а також забезпечує високу точність розрахунків.

Приклад 2.1. Розглянемо задачу (значення відповідають варіанту 0 з табл. 2.1). Меблевий комбінат випускає книжкові полиці трьох типів: А - з натуральної деревини зі склом, B_1 - з полірованої ДСП без скла, В2 - з полірованої ДСП зі склом. Габарити полиць: довжина 1100 (d) мм, ширина 250 (w) мм, висота 300 (h) мм. Розмір листа ДСП 2×3 м.

При виготовленні полиць А виконують наступні роботи: столярні, покриття лаком, сушіння, різання скла, упаковка. Всі операції в ході столярних робіт та упаковки виконують вручну. Полиці В1 та В2 поставляють у торгову мережу в розібраному вигляді. За винятком операції упаковки, всі інші операції (виробництво комплектуючих для полиць, різання скла) при виготовленні полиць В1 та В2, виконують на спеціалізованих автоматах.

Трудомісткість столярних робіт з випуску однієї полиці А становить 4 (**Тр1**) год. Продуктивність автомату, що покриває полиці А лаком – 10 (**Пр1**) полиць на годину, автомату, що ріже скло – 100 (**Пр2**) стекол на годину. Змінний фонд часу автомату для покриття лаком – 7 (**ФВ1**) год., автомату для різання скла – 7,5 (**ФВ2**) год. Сушіння полиць після покриття лаком відбувається протягом доби у спеціальних сушарках, що уміщують 50 (**V1**) полиць. На упаковку полиці А потрібно 4 (**Тр2**) хвилини. У виробництві полиць зайняти 40 (**Р1**) столярів та 14 (**Р2**) пакувальників.

Продуктивність автомата, що виробляє комплектуючи для полиць В1 та В2, дорівнює 3 (**Пр3**) полиці на годину, а його змінний фонд часу дорівнює 7,4 (**ФВ3**) год., трудомісткість пакувальних робіт становить 8 (**Тр3**) хв. для полиці В1 та 10 (**Тр4**) хв. для полиці В2.

Від постачальників комбінат отримує на місяць 400 (**Z1**) листів полірованої ДСП, 230 (**Z2**) листів ДВП (деревинно-волокнистої плити), а також 260 (**Z3**) листів скла. З кожного листа ДВП можна викроїти 14 (**К1**) задніх стінок полиць В1 та В2, а з кожного листа скла – 10 (**К2**) стекол для полиць А та В2.

Склад готової продукції може розмістити не більше за 350 (**V2**) полиць та комплектів полиць, причому щодня у торгову мережу вивозять у середньому 40 (**N**) полиць та комплектів. На початок поточного місяця на складі залишилося 100 (**Ост**) полиць, що вироблені раніше. Собівартість полиці А дорівнює 205 (**С1**) грн., полиці В без скла – 142 (**С2**) грн., зі склом – 160 (**С3**) грн.

Маркетингові дослідження показали, що частка продажів полиць обох видів зі склом становить не менш за 60% (**Д**) у загальному обсязі продажів, а місткість ринку полиць певного типу становить близько 5300 (**V3**) штук на місяць. Меблевий комбінат уклав договір на поставку замовникові 50 (**З**) полиць типу В2 у поточному місяці.

Необхідно скласти план виробництва полиць на поточний місяць. Відомі ціни реалізації полиць: полиця А – 295 (**Ц1**) грн., полиця В1 без скла – 182 (**Ц2**) грн., полиця В2 зі склом – 220 (**Ц3**) грн.

Побудова моделі

1-й етап побудови моделі полягає в ідентифікації змінних. У даній задачі шуканими невідомими величинами є кількість полиць кожного виду, які будуть вироблені у поточному місяці. Отже, змінні x_A – кількість полиць А (шт./міс.); x_{B_1} – кількість полиць В1 (шт./міс.); x_{B_2} – кількість полиць В2 (шт./міс.).

2-й етап побудови моделі полягає в побудові цільової функції. У цьому випадку ціллю є максимізація прибутку, одержуваного від продажу полиць всіх видів протягом місяця. Оскільки в цій задачі прибуток можна визначити як різницю між ціною (Ц1, Ц2, Ц3) та собівартістю (С1, С2, С3), цільова функція має вигляд

$$L(X) = (295 - 205)x_A + (182 - 142)x_{B_1} + (220 - 160)x_{B_2} \to \max \text{, грн./міс.}$$

3-й етап побудови моделі полягає у завданні обмежень, що моделюють умови задачі. Всі обмеження розглянутої задачі можна поділити на кілька типів.

Обмеження за фондом часу (з урахуванням трудомісткості робіт)

Ліва частина обмежень за фондом часу є часом, що затрачується на виробництво полиць протягом місяця у кількості x_A, x_{B_1}, x_{B_2} штук. Права частина обмеження – це фонд робочого часу виконавця роботи (робітника або автомату) за зміну. Обмеження за фондом часу на виконання столярних робіт має вигляд

$$4x_A \le 40 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22 \text{, год/міс,}$$

де коефіцієнт 4 год/шт. (Тр1) – час, затрачуваний на столярні роботи при виробництві однієї полиці типу А (трудомісткість); 40 чол. (Р1) – кількість столярів, що беруть участь у виробництві; 8 $год/(чол. \cdot зм.)$ – кількість годин роботи однієї людини протягом зміни; 1 зм./дн. – кількість змін в одному робочому дні; 22 дн./міс. – кількість робочих днів у місяці (табл. 2.1):

Аналогічно дістанемо обмеження за фондом часу на пакувальні роботи:

$$\frac{4}{60}x_A + \frac{8}{60}x_{B_1} + \frac{10}{60}x_{B_2} \le 14 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22 \text{, год/міс.,}$$

де 14 чол. (Р2) – кількість пакувальників

Обмеження за фондом часу (з урахуванням продуктивності)

Особливість обмежень, що враховують дані про продуктивність, полягає в тому, що продуктивність необхідно перетворити на трудомісткість.

Трудомісткість є величиною, що зворотна до продуктивності. Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А має вигляд

$$\frac{1}{10}x_A \le 7 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год/міс.},$$

де коефіцієнт $\frac{1}{10}$ ($\frac{1}{Пр_1}$) при x_A – кількість годин, що доводяться на покриття лаком однієї полиці типу А. При записі правої частини обмеження враховуємо, що автомат, який виконує покриття лаком, працює не повну зміну (8 год), а протягом змінного фонду часу 7 год (ФВ1). Це пов'язане з необхідністю підготовки автомата до роботи та обслуговуванням його після закінчення роботи.

Обмеження за фондом часу на різання скла для полиць типу А та В2:

$$\frac{2}{100}x_A + \frac{2}{100}x_{B_2} \le 7{,}5 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год/міс.}$$

Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2:

$$\frac{1}{3}x_{B_1} + \frac{1}{3}x_{B_2} \le 7{,}4 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год/міс.}$$

Обмеження за запасами матеріалів, що витрачаються у виробництві

Побудуємо обмеження за запасом листів ДСП, який поставляється щомісяця на комбінат. При цьому врахуємо, що з листа ДСП треба викроювати комплекти деталей (верхню та нижню сторони полиць, 2 бічні сторони). Тому при завданні обмеження будемо орієнтуватися не на кількість листів ДСП, а на кількість комплектів для полиць $Y_{компл}$, яку можна одержати з наявного запасу ДСП. Оскільки листи ДСП можна розкроювати за різними способами та одержувати при цьому різну кількість деталей та комплектів, значення $Y_{компл}$ необхідно розрахувати. Отже, обмеження за запасом листів ДСП має вигляд:

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \le Y_{компл}, \text{ компл/міс.}$$

Аналогічно одержимо обмеження за запасом задніх стінок з ДВП для полиць В1 та В2:

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \le 230 \cdot 14, \text{ задн. стін/міс.},$$

де 230 (Z2) - щомісячний запас листів ДВП; 14 (К1) - кількість задніх стінок полиць, одержуваних з одного листа. Причому, на кожну полицю В1 та В2 припадає по одній задній стінці.

Обмеження за запасом скла для полиць А та В2:

$$2x_A + 2x_{B_2} \le 260 \cdot 10 \text{, скло/міс.,}$$

де 260 (Z3) - щомісячний запас листів скла; 10 (К2) - кількість стекол. Причому, на кожну полицю А та В2 припадає по 2 скла.

Обмеження за ємністю допоміжних приміщень та ринку

Складемо обмеження за кількістю полиць А, яку може вмістити сушарка:

$$x_A \le 50 \cdot 22 \text{, шт/міс.,}$$

де 50 (V1) - кількість полиць, що може бути просушеною у один день; 22 - кількість робочих днів у місяці.

Обмеження за кількістю полиць всіх видів, які може умістити склад готової продукції:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 350 - 100 + 40 \cdot 22 \text{, шт/міс.,}$$

де коефіцієнт 100 (Ост) враховує, що загальна ємність складу зменшена на кількість полиць, які залишилися невивезеними з минулого місяця; коефіцієнт 40 (N) враховує кількість місць для полиць, що протягом місяця щодня звільнятимуться.

Обмеження, що враховує місткість ринку, яка дорівнює 5300 (V3) за полицями всіх видів:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 5300 \text{, шт/міс.}$$

Обмеження за гарантованим замовленням

Запишемо обмеження на мінімальну кількість замовлених полиць 50 (З):

$$x_{B_2} \ge 50 \text{, шт/міс.}$$

Обмеження за співвідношенням обсягів продажів різних товарів

Частку полиць А та В2 у загальному обсязі полиць, що вироблені для вільного продажу, яка становить не менш за 60% (Д) виразимо обмеженням

$$x_A + \left(x_{B_2} - 50\right) \ge 0{,}6\left[x_A + x_{B_1} + \left(x_{B_2} - 50\right)\right],$$

де $\left(x_{B_2} - 50\right)$ – кількість полиць В2, що надходять у вільний продаж.

Або $$0{,}4x_A - 0{,}6x_{B_1} + 0{,}4x_{B_2} \geq 20 \text{ шт/міс.}$$

Визначимо максимальну кількість комплектів для полиць B_1 та B_2.

Залежно від розмірів листів ДСП (2000×3000 мм) деталі полиць В1 та В2 можна викроїти за трьома різними способами. За першим варіантом розкрою з одного листа ДСП можна викроїти 19 деталей верхньої або нижньої стінок та 9 деталей бічних стінок. За другим варіантом одержимо 12 деталей верхньої або нижньої стінок та 36 деталей бічних стінок. За третім варіантом розкрою одержимо 16 деталей верхньої або нижньої стінок та 18 деталей бічних стінок. Позначимо кількість листів ДСП, що розкроєні протягом місяця за 1-м варіантом, y_1 (лист./міс.), за 2-м варіантом – y_2 (лист./міс.), за 3-м варіантом – y_3 (лист./міс.). Листи ДСП треба розкроїти так, щоб з отриманих деталей дістати максимальну кількість комплектів $Y_{компл}$ для полиць. Отже, цільова функція має вигляд

$$L(Y) = Y_{компл} \to \max, \text{ компл/міс.}$$

Кількість всіх листів ДСП, що розкроєні, не повинна перевищувати 400 (Z1), тобто щомісячний запас їх на складі, тоді

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 400, \text{ лист/міс.}$$

Врахуємо, що до кожного комплекту входить одна верхня та одна нижня стінки. Тоді кількість нижніх та верхніх стінок, одержуваних при розкрої всіх листів ДСП, не повинна бути меншою за $2Y_{компл}$:

$$19y_1 + 12y_2 + 16y_3 \geq 2Y_{компл}, \text{ дет/міс.}$$

Аналогічно кількість бічних стінок також не повинна бути меншою за $2Y_{компл}$:

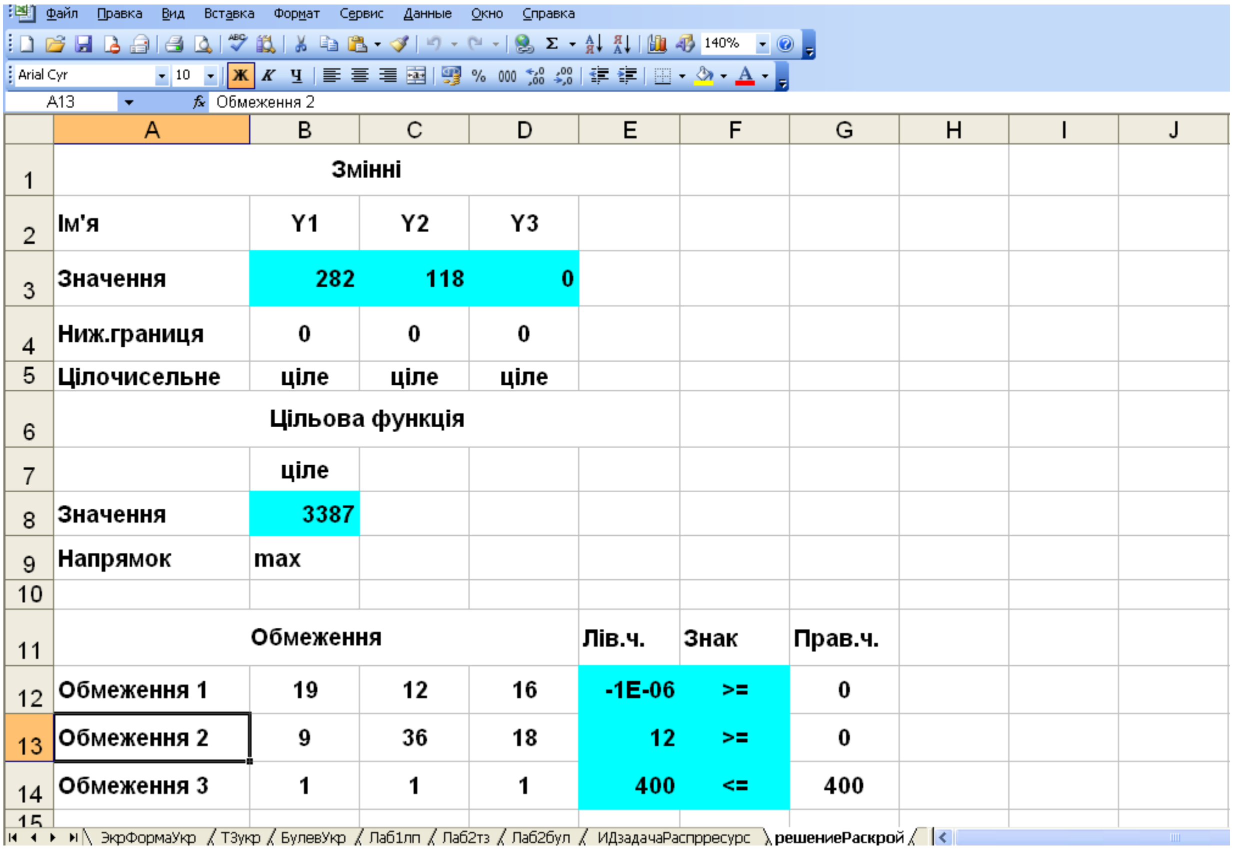
$$9y_1 + 36y_2 + 18y_3 \geq 2Y_{компл.}, \text{ дет/міс.}$$

Врахуємо, що $2Y_{компл}$ є змінною та перенесемо її у ліву частину обмеження, тоді модель визначення максимальної кількості комплектів матиме вигляд:

$$L(Y) = Y_{компл} \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 400, \\ 19y_1 + 12y_2 + 16y_3 - 2Y_{компл} \ge 0, \\ 9y_1 + 36y_2 + 18y_3 - 2Y_{компл} \ge 0, \\ y_1, y_2, y_3, Y_{компл} \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі – на рис. 2.1.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Змінні					
2	Ім'я	Y1	Y2	Y3			
3	Значення	282	118	0			
4	Ниж.границя	0	0	0			
5	Цілочисельне	ціле	ціле	ціле			
6		Цільова функція					
7		ціле					
8	Значення	3387					
9	Напрямок	max					
10							
11		Обмеження			Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
12	Обмеження 1	19	12	16	-1E-06	>=	0
13	Обмеження 2	9	36	18	12	>=	0
14	Обмеження 3	1	1	1	400	<=	400

Рис. 2.1 – Визначення максимальної кількості комплектів для полиць B_1 та B_2

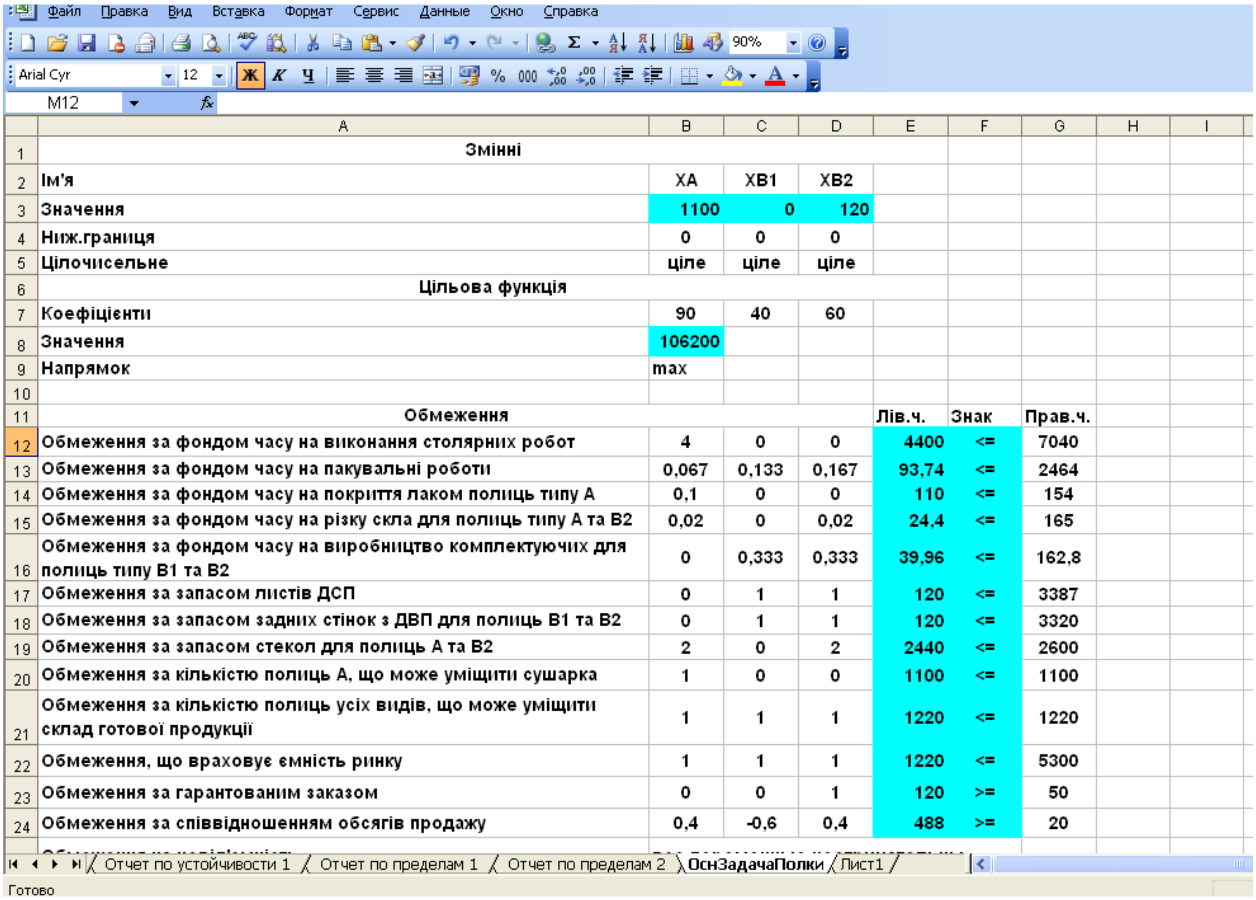
Отже, 282 листа треба розкроїти за першим варіантом (одержимо 5358 верхніх та нижніх стінок і 2538 бічних стінок) та 118 листів – за другим варіантом (одержимо 1416 верхніх та нижніх стінок і 4248 бічних стінок). Максимальна кількість комплектів $Y_{компл}$ =3387.

Вирішимо вихідну задачу, модель якої має наступний вигляд:

$$L(X) = 90x_A + 40x_{B_1} + 60x_{B_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_A \le 7040; \\ 0{,}067x_A + 0{,}133x_{B_1} + 0{,}167x_{B_2} \le 2464; \\ 0{,}1x_A \le 154; \\ 0{,}02x_A + 0{,}02x_{B_2} \le 165; \\ 0{,}333x_{B_1} + 0{,}333x_{B_2} \le 162{,}8; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \le 3387; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \le 3220; \\ 2x_A + 2x_{B_2} \le 2600; \\ x_A \le 1100; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 1220; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 5300; \\ x_{B_2} \ge 50; \\ 0{,}4x_A - 0{,}6x_{B_1} + 0{,}4x_{B_2} \ge 20; \\ x_A, x_{B_1}, x_{B_2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідно до результату розв'язання, що представлений на рис. 2.2, у поточному місяці необхідно виробити 1100 полиць А та 120 полиць В2. Виробництво полиць В1 є недоцільним. У результаті комбінат дістане прибуток у розмірі 106200 грн.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Змінні						
2	Ім'я	XA	XB1	XB2			
3	Значення	1100	0	120			
4	Ниж.границя	0	0	0			
5	Цілочисельне	ціле	ціле	ціле			
6	Цільова функція						
7	Коефіцієнти	90	40	60			
8	Значення	106200					
9	Напрямок	max					
10							
11	Обмеження				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
12	Обмеження за фондом часу на виконання столярних робот	4	0	0	4400	<=	7040
13	Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи	0,067	0,133	0,167	93,74	<=	2464
14	Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А	0,1	0	0	110	<=	154
15	Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2	0,02	0	0,02	24,4	<=	165
16	Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2	0	0,333	0,333	39,96	<=	162,8
17	Обмеження за запасом листів ДСП	0	1	1	120	<=	3387
18	Обмеження за запасом задних стінок з ДВП для полиць В1 та В2	0	1	1	120	<=	3320
19	Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2	2	0	2	2440	<=	2600
20	Обмеження за кількістю полиць А, що може уміщити сушарка	1	0	0	1100	<=	1100
21	Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може уміщити склад готової продукції	1	1	1	1220	<=	1220
22	Обмеження, що враховує ємність ринку	1	1	1	1220	<=	5300
23	Обмеження за гарантованим заказом	0	0	1	120	>=	50
24	Обмеження за співвідношенням обсягів продажу	0,4	-0,6	0,4	488	>=	20

Рис. 2.2 – Розв'язок задачі про виробництво полиць

Зміст звіту

- умова задачі з вихідними даними відповідно до варіанта;
- побудована модель задачі із вказівкою всіх одиниць виміру;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;
- результати розв'язання задачі;
- висновок.

Контрольні запитання

1. Що таке розподільна задача, загальна розподільна задача?
2. Що таке математичне та лінійне програмування?
3. Яка загальна форма запису моделі ЛП?
4. Що таке припустимий та оптимальний розв'язки?
5. Поясніть основні етапи побудови математичної моделі ЛП.

6. Поясніть економічний зміст та математичний вигляд цільової функції задачі про виробництво полиць.

7. Як можна класифікувати обмеження задачі про полиці за їх економічним змістом?

8. Чим відрізняється побудова обмежень, що використовують дані про трудомісткість та продуктивність робіт?

9. Поясніть спосіб побудови кожного конкретного обмеження задачі про полиці.

10. Поясніть, як вирішується задача оптимального розкрою листів ДСП.

11. Поясніть, як одиниці виміру параметрів задачі використовують для виявлення помилок побудови обмежень?

Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 2.1 – Вихідні дані варіантів завдань до лабораторної роботи №2

№ вар.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
D	1100	1070	1140	1030	1180	990	1220	950	1260	910	1300	870	1340
w	250	240	260	230	270	240	260	230	270	240	260	230	270
h	300	290	280	270	260	250	240	310	320	330	340	350	360
Тр1	4	4,4	3,6	4,8	3,2	5,2	2,8	5,6	2,4	6	2	6,4	1,6
Тр2	4	10	5	9	6	8	7	5	8	6	9	7	10
Тр3	8	15	10	13	9	13	10	8	11	10	15	14	16
Тр4	10	16	12	14	10	14	11	9	14	13	18	16	20
Р1	40	22	19	6	27	16	9	25	11	8	30	14	7
Р2	14	16	12	11	7	5	13	3	6	8	10	2	9
Пр1	10	4	9	5	2	6	4	7	4	3	5	8	6
Пр2	100	150	170	250	180	130	190	120	200	110	210	140	220
Пр3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ФВ1	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2	7	7,3	7,4
ФВ2	7,5	7,6	7,7	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2
ФВ3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6
Z1	400	390	365	380	415	370	405	350	395	410	385	420	375
Z2	230	240	235	220	215	200	195	180	205	160	175	140	155
Z3	260	200	250	190	240	180	230	290	220	230	210	270	200

Продовження табл. 2.1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
К1	14	15	5	16	6	17	7	12	8	13	18	11	9
К2	10	11	12	5	13	6	14	7	15	8	16	9	17
V1	50	20	65	40	55	75	45	60	35	70	25	30	80
V2	350	400	360	300	370	310	380	320	390	330	410	340	420
V3	5300	2000	3700	3000	1100	4000	2500	1500	1400	2700	4300	3100	1900
N	40	45	67	50	72	55	44	60	38	65	30	70	35
Ост	100	110	90	170	80	160	70	150	60	140	50	120	40
Д	60(А, В2)	15А	10В1	15(В1, В2)	43(А, В1)	72А	12В2	16(В1, В2)	23(А, В2)	46А	59В1	13(В1, В2)	9(А, В1)
З	50 В2	30А	15В1	10А, 18В1	5А, 12В2	40В1, 3В2	60В2	24А	80В1	14А, 21В1	38А, 62В2	23В1, 20В2	84В2
С1	205	210	145	200	150	215	170	220	165	225	180	230	195
С2	142	150	125	164	120	187	125	176	129	195	143	207	126
С3	160	170	133	178	134	205	148	197	142	210	162	214	146
Ц1	295	256	213	284	192	243	198	274	203	281	224	276	249
Ц2	182	202	149	190	154	230	175	246	194	263	214	287	186
Ц3	220	224	158	206	147	243	180	242	167	267	202	246	187
3 варіанти розкрою листів ДСП; 8 годин у зміні; робота в 1 зміну; 22 робочих дня у місяці													

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3
АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОДНОІНДЕКСНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ціль роботи - придбання навичок з аналізу чутливості задач ЛП на основі різних типів звітів, видаваних Microsoft Excel, про результати пошуку розв'язку.

Вихідні дані – результати розв'язання задачі про полиці відповідно до варіанту, зазначеного викладачем.

Порядок виконання роботи

1. Для задачі, вирішеної у лабораторній роботі №2, отримайте в Excel всі типи звітів за результатами пошуку розв'язку, необхідні для аналізу чутливості.
2. Проаналізуйте задачу на чутливість до змін параметрів вихідної моделі.

Основні відомості

Задача аналізу оптимального розв'язку на чутливість пов'язана з тим, що на практиці багато економічних параметрів з часом змінюють значення, тому оптимальний розв'язок задачі може опинитися непридатним або неоптимальним. Аналіз чутливості оптимального розв'язку дозволяє визначити, як впливають на нього можливі зміни параметрів.

Обмеження лінійної моделі називають *сполучними*, якщо відповідна пряма проходить через оптимальну точку. Ресурс, що відповідає сполучному обмеженню, є *дефіцитним*. Якщо пряма, що відповідає обмеженню не проходить через оптимальну точку, його називають *несполучним,* а відповідний і-й ресурс є *недефіцитним*. Обмеження називають *надлишковим*, якщо його виключення не впливає на область припустимих розв'язків і, отже, на оптимальний розв'язок. Прийнято виділяти дві задачі аналізу на чутливість:

1. Аналіз скорочення або збільшення кількості ресурсів дозволяє визначити, на скільки одиниць можна збільшити або зменшити запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення цільової функції;

на скільки одиниць можна зменшити або збільшити запас *недефіцитного* ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції; збільшення (зменшення) запасу якого з ресурсів є найвигіднішим.

2. Аналіз зміни цільових коефіцієнтів дозволяє визначити, у якому діапазоні зміни коефіцієнтів цільової функції не змінюється оптимальний план.

Приклад 3.1. Зробимо аналіз чутливості оптимального розв'язку задачі з попередньої лабораторної роботи №2. Після запуску в Excel задачі на розв'язання у вікні *«Результаты поиска решения»* виділимо за допомогою миші два типи звітів: *«Результаты»* і *«Устойчивость»* (рис. 3.1).

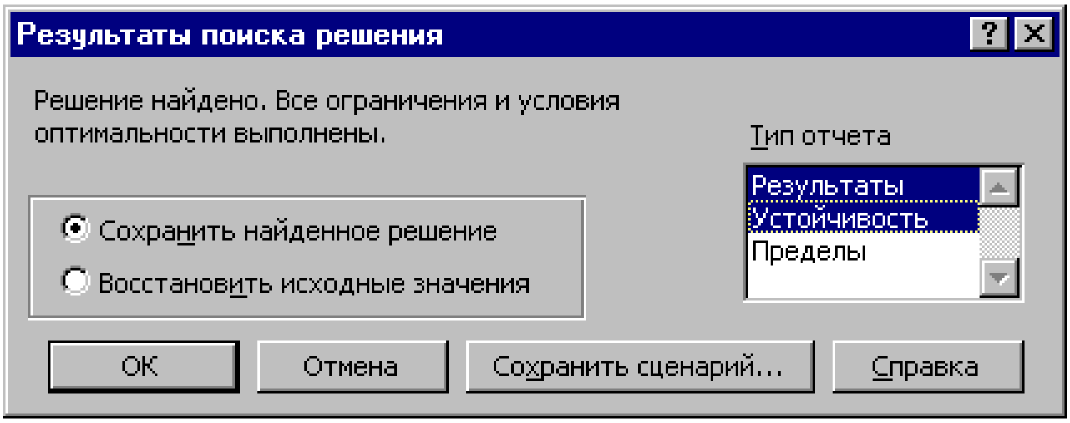


Рис. 3.1 – Виділення типів звітів необхідних для аналізу чутливості

Аналіз звіту за результатами

Звіт за результатами складається з трьох таблиць (рис.3.2):

- перша таблиця *«Целевая ячейка»* містить інформацію про цільову функцію;
- друга таблиця *«Изменяемые ячейки»* містить інформацію про значення змінних, отриманих у результаті розв'язання задачі;
- третя таблиця *«Ограничения»* показує результати оптимального розв'язання для обмежень та для граничних умов.

	A	B	C	D	E	F	G
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
8		$B$8	Значення цiле	106200	106200		
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
13		$B$3	Значення ХА	1100	1100		
14		$C$3	Значення ХВ1	0	0		
15		$D$3	Значення ХВ2	120	120		
16							
17							
18	Ограничения						
19		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
20		$E$12	Обмеження за фондом часу на виконання столярних робот Лів.ч.	4400	$E$12<=$G$12	не связан.	2640
21		$E$13	Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи Лів.ч.	93,74	$E$13<=$G$13	не связан.	2370,26
22		$E$14	Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А Лів.ч.	110	$E$14<=$G$14	не связан.	44
23		$E$15	Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2 Лів.ч.	24,4	$E$15<=$G$15	не связан.	140,6
24		$E$16	Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2 Лів.ч.	39,96	$E$16<=$G$16	не связан.	122,84
25		$E$17	Обмеження за запасом листів ДСП Лів.ч.	120	$E$17<=$G$17	не связан.	3267
26		$E$18	Обмеження за запасом задних стінок з ДВП для полиць В1 та В2 Лів.ч.	120	$E$18<=$G$18	не связан.	3200
27		$E$19	Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2 Лів.ч.	2440	$E$19<=$G$19	не связан.	160
28		$E$20	Обмеження за кількістю полиць А, що може уміщити сушарка Лів.ч.	1100	$E$20<=$G$20	связанное	0
29		$E$21	Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може уміщити склад готової продукції Лів.ч.	1220	$E$21<=$G$21	связанное	0
30		$E$22	Обмеження, що враховує ємність ринку Лів.ч.	1220	$E$22<=$G$22	не связан.	4080
31		$E$23	Обмеження за гарантованим заказом Лів.ч.	120	$E$23>=$G$23	не связан.	70
32		$E$24	Обмеження за співвідношенням обсягів продажу Лів.ч.	488	$E$24>=$G$24	не связан.	468
33		$B$3	Значення ХА	1100	$B$3>=$B$4	не связан.	1100
34		$C$3	Значення ХВ1	0	$C$3>=$C$4	связанное	0
35		$D$3	Значення ХВ2	120	$D$3>=$D$4	не связан.	120

Рис. 3.2 – Лист звіту за результатами

Якщо ресурс використовується повністю, тобто є дефіцитним, то у графі *«Статус»* цієї таблиці відповідне обмеження вказується як *«сполучне»*; при неповному використанні ресурсу, тобто якщо ресурс недефіцитний, у цій графі вказується *«несполучне»*. У графі *«Значение»* наведена кількість ресурсу, використана на виробництво продукції. У графі *«Разница»* показано різницю між значенням змінної у знайденому оптимальному розв'язку та заданій для неї граничній умові, тобто невикористаний залишок ресурсу.

Третя таблиця звіту за результатами подає інформацію для аналізу можливої зміни запасів *недефіцитних* ресурсів при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції. Так, якщо на ресурс накладене обмеження типу ≥, то в графі *«Разница»* показується кількість ресурсу, на яку була перевищена мінімально необхідна норма. Наприклад, аналіз рядка 31 звіту за результатами задачі показує, що полиць випущено на 70 шт. більше, ніж було замовлено. Тобто з 120 полиць 70 шт. підуть у вільний продаж. Отже, можна дати наступну відповідь на запитання про зміну запасу недефіцитного ресурсу «Значение ХВ2»: *обов'язкове замовлення на виробництво полиць В2* *можна збільшити на 70 шт.., тобто замовляти до 120 шт.., при цьому оптимальний розв'язок задачі не зміниться.*

Якщо на ресурс накладене обмеження типу $\leq$, то в графі *«Разница»* дається кількість ресурсу, що не використовується при реалізації оптимального розв'язку. Так, аналіз рядка 20 звіту за результатами показує, що час столярних робіт склав 4440 год. Невитраченими залишаються 2640 годин із загального фонду часу, відведеного на столярні роботи. З цього випливає, що *запас недефіцитного ресурсу «Фонд часу за столярними роботами» можна зменшити на 2640 годин, і це ніяк не вплине на оптимальний розв'язок.* Звідси випливає, що кількість столярів можна зменшити на 15 чоловік

$$\frac{2640 \text{ год} / \textit{міс.}}{8 \text{ год} / (\textit{чол.} \cdot \textit{зм.}) \cdot 1 \textit{зм.}/\textit{дн.} \cdot 22 \textit{дн.}/\textit{міс.}} = 15 \textit{ чол.}$$

або перевести їх на виробництво іншої продукції.

Аналіз рядка 30 показує, що загальна кількість полиць, що випускаються, становить 1220 шт., що менше передбачуваної місткості ринку на 4080 шт. *Тобто запас недефіцитного ресурсу «Місткість ринку» можна зменшити до 1220 полиць, і це ніяк не вплине на оптимальний розв'язок.* Інакше кажучи, зменшення попиту до 1220 полиць на місяць ніяк не позначиться на оптимальних обсягах випуску полиць.

На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок про те, що існують причини (обмеження), які не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць і діставати більший прибуток. Проаналізувати ці причини дозволяє звіт із стійкості.

Аналіз звіту із стійкості

Звіт із стійкості складається з двох таблиць (рис. 3.3). Перша таблиця містить інформацію, що стосується змінних. Графа «*Результирующее значение*» містить оптимальний план. Графа «*Нормированная стоимость*» показує, на скільки грошових одиниць зміниться значення цільової функції у випадку примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальний план.

Наприклад, у звіті із стійкості для розглянутої задачі нормована вартість для полиць В1 дорівнює –20 грн./шт. Це означає, що якщо, незважаючи на оптимальний розв'язок, включити в план випуску 1 полицю В1, новий план випуску ($x_A = 1100$; $x_{B_1} = 1$; $x_{B_2} = 119$) принесе прибуток 106180 грн./міс., який на 20 грн. менший за попередній оптимальний розв'язок. Графа «*Целевой коэффициент*» містить коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних. У графах *«Допустимое увеличение»* та *«Допустимое уменьшение»* містяться граничні значення збільшень цільових коефіцієнтів Δc_j, при яких зберігається первісний оптимальний розв'язок. Наприклад, *припустиме збільшення ціни на полиці В1 дорівнює 20 грн./шт., а припустиме зменшення – практично не обмежене* (рядок 10). Це означає, що якщо ціна на полиці В1 зросте більше чим на 20 грн./шт., наприклад дорівнюватиме 61 грн./шт., оптимальний розв'язок зміниться, і стане доцільним випуск В1. А якщо їх ціна буде знижуватися аж до нуля, то оптимальний розв'язок залишиться тим самим.

Примітка. *При виході за зазначені у звіті із стійкості межі зміни цін оптимальний розв'язок може змінюватися як за номенклатурою продукції, так і за обсягами випуску (без зміни номенклатури).*

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значення XA	1100	0	90	1E+30	30
$C$3	Значення XB1	0	-20,00000001	39,99999999	20,00000001	1E+30
$D$3	Значення XB2	120	0	60	30	20,00000001

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$12	Обмеження за фондом часу на виконання столярних робот Лів.ч.	4400	0	7040	1E+30	2640
$E$13	Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи Лів.ч.	93,74	0	2464	1E+30	2370,26
$E$14	Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А Лів.ч.	110	0	154	1E+30	44
$E$15	Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2 Лів.ч.	24,4	0	165	1E+30	140,6
$E$16	Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2 Лів.ч.	39,96	0	162,8	1E+30	122,84
$E$17	Обмеження за запасом листів ДСП Лів.ч.	120	0	3387	1E+30	3267
$E$18	Обмеження за запасом задних стінок з ДВП для полиць В1 та В2 Лів.ч.	120	0	3320	1E+30	3200
$E$19	Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2 Лів.ч.	2440	0	2600	1E+30	160
$E$20	Обмеження за кількістю полиць А, що може уміщити сушарка Лів.ч.	1100	30	1100	70	368,8888889
$E$21	Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може уміщити склад готової продукції Лів.ч.	1220	60	1220	80	70
$E$22	Обмеження, що враховує ємність ринку Лів.ч.	1220	0	5300	1E+30	4080
$E$23	Обмеження за гарантованим заказом Лів.ч.	120	0	50	70	1E+30
$E$24	Обмеження за співвідношенням обсягів продажу Лів.ч.	488	0	20	468	1E+30

Отчет по пределам 2 / Отчет по результатам 2 / **Отчет по устойчивости 2** / ОснЗадачаПолки / Лист1

Рис. 3.3 – Звіт із стійкості для задачі про виробництво полиць

Друга таблиця Звіту із стійкості містить інформацію щодо обмежень. У графі *«Результирующее значение»* містяться кількості використаних ресурсів. У колонці **«***Теневая цена»* показано розв’язок двоїстої задачі, що визначає цінність додаткової одиниці і-го ресурсу. Тіньові ціни розраховуються тільки для дефіцитних ресурсів. У колонці *«Ограничение. Правая часть»* показано наявну у розпорядженні кількість ресурсів.

У графах *«Допустимое увеличение»* та *«Допустимое уменьшение»* містяться граничні значення збільшення ресурсів Δb_i. У графі *«Допустимое уменьшение»* показано, на скільки можна зменшити або збільшити кількість ресурсу, зберігши при цьому оптимальний розв’язок. Зробимо аналіз дефіцитних ресурсів. Аналізуючи звіт за результатами, ми встановили, що існують причини (обмеження), які не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць, чим в оптимальному розв’язку, і одержувати більш високий прибуток. У розглянутій задачі (варіант 0) такими обмеженнями є дефіцитні ресурси *«Ємність сушарки»* та *«Ємність складу* *готової продукції»*. Оскільки знак обмежень цих запасів має вигляд ≤, виникає питання, на скільки максимально повинна зрости ємність цих приміщень, щоб забезпечити збільшення випуску продукції. Відповідь на це запитання показано у графі *«Допустимое увеличение»*. Ємність сушарки можна збільшити якнайбільше на 70 полиць, а ємність складу готової продукції - на 80 полиць. Це призведе до нових оптимальних розв'язків, що збільшують прибуток. Подальше збільшення ємностей сушарки та складу понад зазначені межі не буде поліпшувати розв'язок, тому що інші ресурси стануть сполучними.

Після того як ми встановили, що збільшення ємностей сушарки та складу призведе до нових планів випуску, що забезпечить більш високий прибуток, виникає питання, що вигідніше розширювати у першу чергу - сушарку або склад. Відповідь на це запитання дають тіньові ціни. Для ємності сушарки тіньова ціна дорівнює 30 грн./шт., а для складу – 60 грн./шт. Отже, кожна полиця, що додатково буде поміщеною у сушарку, збільшить прибуток на 30 грн., а кожна полиця, що додатково буде поміщеною на склад, збільшить прибуток на 60 грн. Звідси висновок: *у першу чергу вигідно збільшувати ємність складу готової продукції*.

Зміст звіту

- модель задачі відповідно до варіанта;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;
- результати аналізу оптимального розв'язку задачі;
- висновок.

Контрольні запитання

1. Що таке сполучні, несполучні, надлишкові обмеження; дефіцитні та недефіцитні ресурси?
2. Поясніть передумови та основні завдання аналізу оптимального розв'язку на чутливість.
3. Поясніть, як за графічним методом проводять аналіз зміни запасу дефіцитних ресурсів.

4. Поясніть, як, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий (поліпшений) запас дефіцитного ресурсу.

5. Поясніть, як за графічним методом проводять аналіз зміни запасу недефіцитних ресурсів.

6. Як, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий запас недефіцитного ресурсу?

7. Що таке цінність додаткової одиниці і-го ресурсу?

8. Як проводять графічний аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції?

9. Як чисельно визначити діапазон зміни коефіцієнтів цільової функції, що не змінює оптимального розв’язку?

10. Яку інформацію про чутливість оптимального розв’язку задачі ЛП можна одержати зі звіту за результатами та зі звіту із стійкості?

11. Проаналізуйте на чутливість задачу про виробництво полиць (відповідно до свого варіанту).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4
СТАНДАРТНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.
(ДВОІНДЕКСНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ)

Ціль роботи - придбання навичок з побудови математичних моделей стандартних транспортних задач ЛП та їх розв'язання у Microsoft Excel.

Вихідні дані – транспортна задача (ТЗ) відповідно до варіанта, що зазначений викладачем.

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до номера свого варіанту оберіть умову задачі.

2. Побудуйте модель задачі та її транспортну таблицю.

3. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі у Excel та продемонструйте його викладачеві.

Основні відомості

Стандартну модель транспортної задачі (ТЗ) визначають як задачу з розробки найбільш економічного плану перевезення продукції одного виду з кількох пунктів відправлення до пунктів призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції та задається за допомогою тарифів на перевезення одиниці продукції.

Вихідні параметри моделі ТЗ:

n – кількість пунктів відправлення, m – кількість пунктів призначення;

a_i – запас продукції у пункті відправлення A_i $(i=\overline{1,n})$ [од. тов.];

b_j – попит на продукцію у пункті призначення B_j $(j=\overline{1,m})$ [од. тов.];

c_{ij} – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j [грн./од. тов.].

Шукані параметри моделі ТЗ:

x_{ij} – кількість продукції, перевезеної з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j [од. тов.].

$L(X)$ – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн.].

Етапи побудови моделі:

- ідентифікація змінних;
- перевірка збалансованості задачі;
- побудова збалансованої транспортної матриці;
- завдання цільової функції;
- завдання обмежень.

Транспортна модель має вигляд:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min;$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n},\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m},\\ x_{ij}\geq 0,\quad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases}$$

Цільова функція являє собою транспортні витрати на здійснення всіх перевезень у цілому. Перша група обмежень вказує, що запас продукції в будь-якому пункті відправлення повинен дорівнювати сумарному обсягу перевезень продукції з цього пункту. Друга група обмежень вказує, що сумарні перевезення продукції до деякого пункту споживання повинні повністю задовольнити попит на продукцію в цьому пункті. Наочною формою подання моделі ТЗ є транспортна матриця (табл.4.1).

Таблиця 4.1 – Загальний вигляд транспортної матриці

Пункти відправлення, A_i	**Пункти споживання,** B_j				**Запаси, [од. прод.]**
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потреба [од. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

ТЗ називають *збалансованою*, якщо виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j ,$$

у протилежному випадку задачу називають *незбалансованою*. Метод потенціалів призначений для розв'язання збалансованої ТЗ. У випадку, коли сумарні запаси перевищують сумарні потреби, необхідно ввести додатковий фіктивний пункт споживання, що буде формально споживати існуючий надлишок запасів, тобто

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідно ввести додатковий фіктивний пункт відправлення, що формально заповнює існуючу нестачу продукції в пунктах відправлення:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Введення фіктивного споживача або відправника викликає необхідність формального завдання фіктивних тарифів $c_{ij}^{ф}$ для фіктивних перевезень, які задають невигідними, тобто дорогими. Зазвичай величину фіктивних тарифів обирають такою, щоб вона перевищувала максимальний з реальних тарифів, використовуваних у моделі, тобто

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}\right).$$

На практиці можливі ситуації, коли у певних напрямках перевезення продукції неможливі, наприклад, через ремонт транспортних магістралей. Такі ситуації моделюють шляхом введення так званих *заборонних* тарифів $c_{ij}^{з}$. Заборонні тарифи повинні зробити неможливими перевезення у відповідних напрямках. Для цього їх величина повинна перевищувати максимальний з реальних тарифів, використовуваних у моделі:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}\right).$$

Приклад 4.1. Нехай необхідно організувати оптимальні за транспортними витратами перевезення борошна з двох складів до трьох хлібозаводів. Щомісячні запаси борошна на складах дорівнюють 79,515 та 101,925 т, а щомісячні потреби хлібозаводів становлять 68,5, 29,5 та 117,4 т відповідно. Борошно на складах зберігають та транспортують у мішках по 45 кг. Транспортні витрати (грн./т) з доставки борошна подані у табл. 4.2. Між першим складом та другим хлібозаводом укладений договір про гарантовану поставку 4,5 т борошна щомісяця. У зв'язку з ремонтними роботами тимчасово неможливе перевезення з другого складу до третього хлібозаводу.

Таблиця 4.2 – Транспортні витрати з доставки борошна (грн./т)

Склади	**Хлібозаводи**		
	$Х_1$	**$Х_2$**	**$Х_3$**
$С_1$	350	190	420
$С_2$	400	100	530

ТЗ являє собою задачу ЛП, яку можна розв’язати за симплекс-методом, що й відбувається при розв’язанні таких задач у Excel. Необхідно побудувати модель, придатну для розв’язання задачі за методом потенціалів.

Позначимо через x_{ij} [міш.] кількість мішків з борошном, які будуть перевезені з i-го складу до j-го хлібозаводу. Перевіримо збалансованість задачі.

Попередньо виключимо обсяг гарантованої поставки з подальшого розгляду. Для цього віднімемо 4,5 т з наступних величин:

- з запасу першого складу $a_1 = 79{,}515 - 4{,}5 = 75{,}015$ т/міс.;

- з потреби у борошні другого хлібозаводу

$$b_2 = 29{,}5 - 4{,}500 = 25{,}000 \text{ т/міс.}$$

Відповідно до умови задачі борошно зберігають та перевозять у мішках по 45 кг, тобто одиницями виміру змінних x_{ij} є мішки борошна. Але запаси борошна на складах та потреби у ньому хлібозаводів задані у тоннах. Тому для перевірки балансу та подальшого розв'язання задачі приведемо ці величини до однієї одиниці виміру – до мішків. Наприклад, запас борошна на першому складі дорівнює 75,015 т/міс., або $\frac{75{,}015\, т/міс.}{0{,}045\, т/міш.} = 1667$ $міш./міс.$, а потреба першого хлібозаводу становить 68 т/міс., або $\frac{68{,}000\, т/міс.}{0{,}045\, т/міш.} = 1511{,}1 \approx 1512$ $міш./міс.$ Округлення при розрахунку потреб необхідно виконувати в більшу сторону, інакше потреба у борошні не буде задоволеною повністю.

Отже, баланс має вигляд

$$\underbrace{\overbrace{1667 + 2265}^{склади}}_{3932\ \text{міш.}/міс.} < \underbrace{\overbrace{1512 + 556 + 2609}^{хлібозаводи}}_{4677\ \text{міш.}/міс.},$$

тобто щомісячний сумарний запас борошна на складах менший за сумарну потребу хлібозаводів на 4677-3932=745 мішків борошна, звідки випливає, що ТЗ є не збалансованою.

Побудуємо збалансовану транспортну матрицю, подану у таблиці 4.3. Вартість перевезення борошна треба віднести до одиниці продукції, тобто до 1 мішка борошна. Так, наприклад, тариф перевезення з першого складу до третього хлібозаводу дорівнює $420\ \text{грн.}/т \cdot 0{,}045\ т/міш. = 18{,}90\ грн./міш.$

Для встановлення балансу необхідно ввести додатковий фіктивний склад, тобто додатковий рядок у транспортній таблиці задачі. Фіктивні тарифи на перевезення задамо так, щоб вони були дорожче за реальні тарифи, наприклад, $c_{3j}^{ф} = 50,0$ грн. /міш.

Неможливість доставки вантажів з другого складу до третього хлібозаводу задамо у моделі за допомогою заборонного тарифу, який перевищує величину фіктивного тарифу, наприклад, $c_{23}^{з} = 100,00$ грн. /міш.

Таблиця 4.3 – Транспортна матриця задачі

Склади	**Хлібозаводи**			**Запас, мішки**
	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	
$\mathbf{C_1}$	15,75	8,55	18,90	1667
$\mathbf{C_2}$	18,00	4,50	**100,00**	2265
$\mathbf{C_ф}$	**50,00**	**50,00**	**50,00**	745
Потреба, мішки	1512	556	2609	$\sum = \mathbf{4677}$

Визначимо цільову функцію. Формально цільова функція являє собою сумарні витрати на всі можливі перевезення борошна:

$$\begin{aligned} L(X) = {} & 15,75x_{11} + 8,55x_{12} + 18,90x_{13} + \\ & + 18,00x_{21} + 4,50x_{22} + 100,00x_{23} + \\ & + 50,00x_{31} + 50,00x_{32} + 50,00x_{33} \rightarrow \min \text{ (грн./міс.)}. \end{aligned}$$

При цьому треба враховувати, що внаслідок використання фіктивних тарифів реальна цільова функція, тобто кошти, які в дійсності прийдеться заплатити за транспортування борошна, буде меншою за формальну на вартість знайдених у процесі розв’язання фіктивних перевезень.

Задамо обмеження:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}\right). \end{cases} \quad \text{(міш./міс.)}$$

Зміст звіту

- умова задачі з вихідними даними відповідно до варіанта;
- побудована модель задачі з вказівкою всіх одиниць виміру;
- транспортна таблиця та модель задачі;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;
- результати розв’язання задачі з вказівкою одиниць виміру.
- висновок.

Контрольні запитання

1. Що таке задача про розміщення?
2. Поясніть постановку стандартної ТЗ.
3. Запишіть математичну модель ТЗ.
4. Перелічіть вихідні та шукані параметри моделі ТЗ.
5. Поясніть суть кожного з етапів побудови моделі ТЗ.
6. Розкрийте поняття збалансованості ТЗ.
7. Що таке фіктивні та заборонні тарифи?
8. У якому співвідношенні повинні перебувати величини фіктивних та заборонних тарифів при необхідності їх одночасного використання у транспортній моделі?

Варіанти індивідуальних завдань

На складах зберігається борошно, яке необхідно завезти до хлібозаводів. Номера складів та номера хлібозаводів треба обирати відповідно до варіантів табл. 4.4. Поточні тарифи на перевезення борошна [грн./т], щомісячні запаси борошна [т/міс.] на складах та потреби хлібозаводів у борошні [т/міс.] зазначені у табл. 4.5.

При цьому необхідно враховувати, що через ремонтні роботи тимчасово немає можливості перевозити борошно з деяких складів до деяких хлібозаводів. У табл. 4.4 це показано у графі «Заборона перевезення» у форматі № складу х № хлібозаводу. Наприклад, «2х3» позначає, що не можна перевозити борошно з складу №2 до хлібозаводу №3.

Крім того, необхідно врахувати, що деякі хлібозаводи мають договори на гарантовану поставку борошна з певних складів. У табл. 4.4 це показано у графі «Гарантована поставка» у форматі № складу х № хлібозаводу = обсяг поставки. Наприклад, «1х4=40» означає, що між складом №1 та хлібозаводом №4 укладений договір на обов'язкову поставку 40 т борошна.

Необхідно організувати поставки щонайкраще, з огляду на те, що борошно зберігають та транспортують у мішках вагою по 50 кг.

Таблиця 4.4 – Номера складів, хлібозаводів, заборонені та гарантовані поставки

№ Варіанта	№ Складів	№ Хлібозаводів	Заборона перевезення	Гарантована поставка, т/міс.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2х2, 3х4	3х3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2х2, 3х5	3х2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1х5, 2х3	4х3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3х3, 4х5	3х5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1х4, 5х3	1х5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5х5, 2х2	3х5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3х3, 2х5	4х3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1х2, 5х4	3х2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5х1, 3х5	5х2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5х4, 3х2	4х3=35
11	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3х4, 5х1	4х1=40
12	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3х2, 4х1	2х2=50

Таблиця 4.5 – Запаси, потреби і тарифи на перевезення

Склади	Хлібозаводи					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Запас, т/міс.**
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Попит, т/міс.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Конспект лекцій з курсу «Математичне програмування» (для слухачів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей 7.050107 «Економіка підприємства», 7.050106 «Облік і аудит») / В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков. – Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 113 с.
2. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математичне програмування» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання та другої вищої освіти ФПО та ЗН / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 74 с.
3. Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу «Математичне програмування» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання та другої вищої освіти ФПО та ЗН / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 74 с.
4. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2001.
5. Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003.
6. Зайченко Ю. П. Исследование операций. – К., 1979.
7. Замков О. О. Математические методы в экономике. – М., 2001.
8. Федосеев. Экономико-математические методы и прикладные модели. – М.: Юнити, 2001.
9. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
10. Алесинская Т. В., Сербин В. Д., Катаев А. В. Учебно-методическое пособие по курсу "Экономико-математические методы и модели". – Таганрог: ТРТУ, 2001.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт
з курсу

«Математичне програмування»

(для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей 7.050107 «Економіка підприємства», 7.050106 «Облік і аудит»)

Укладачі: **ОХРІМЕНКО** Вячеслав Миколайович,
ВОРОНКОВА Тетяна Борисівна,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *О. С. Гаєвський*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2011, поз. 636 М

Підп. до друку 07.11.2011 Формат 60×84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,5
Зам. № Тираж 100 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.